ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΑ

. .

Α.Μ. .

ΛΑΜΙΑ 2015

Παράδοση και προφορική εξέταση της εργασίας

Για να ληφθεί υπόψιν ο βαθμός της εργασίας στην τελική βαθμολογία θα πρέπει η εργασία όταν παραδοθεί να εξεταστεί και προφορικά. Η εργασία θα πρέπει παραδοθεί την ημέρα που θα δηλώσετε στο eclass. Υπενθυμίζεται όμως ότι καμμία εργασία δεν θα γίνει δεκτή αν δεν δηλωθεί στο eclass.

Δηλαδή για να μπορέσετε να έχετε κάποιον ποσοστό στην τελική βαθμολογία από την εργασία θα πρέπει να δηλώσετε ημέρα παράδοσης, να την παραδώσετε την μέρα εκείνη και να εξεταστείτε προφορικά. Μόνο μετά από επιτυχή προφορική εξέταση θα προστεθεί ποσοστό 20% από τον βαθμό της εργασίας σας στον τελικό βαθμό.

Η παράδοση και εξέταση των εργασιών θα γίνεται σχεδόν καθημερινά από την Δευτέρα 8 Ιουνίου μέχρι και την Τετάρτη 17 Ιουνίου στο γραφείο Έκτακτου Εκπαιδευτικού Προσωπικού (δίπλα στο Μεγάλο Αμφιθέατρο). Η παράδοση και εξέταση θα μπορεί να γίνεται αρκετές ώρες κάθε μέρα και το ακριβές ωράριο θα είναι αναρτημένο στο eclass. Θα πρέπει να ενημερώνεστε συχνά για απρόβλεπτες αλλαγές της τελευταίας στιγμής. Τις ημερομηνίες παράδοσης μπορείτε να βρείτε στο πεδίο "Ομάδες Χρηστών" στο eclass και εκεί θα δηλώνετε ομάδες. Δηλαδή οι ομάδες χρηστών υποδηλώνουν ημέρα παράδοσης.

Δεν θα είναι δυνατόν για τεχνικούς λόγους να παραδοθεί και να εξεταστεί καμμία εργασία στις 23 Ιουνίου, δηλαδή την ημέρα της τελικής εξέτασης.

Βαθμολογία εργασίας

Ο βαθμός της εργασίας σε ποσοστό 20% θα προστεθεί στον βαθμό που θα έχετε από τις προόδους ή που θα πάρετε στην τελική πρόοδο (5 Ιουνίου) ή στην τελική εξέταση (23 Ιουνίου).

Δηλαδή η **τελική βαθμολογία** θα προκύψει ως εξής:

- **(Α' Πρόοδος + Β' Πρόοδος)/2 + 20% Εργασία**
- **Τελική Πρόοδος (5 Ιουνίου) + 20% Εργασία**
- **Τελική Εξέταση (23 Ιουνίου) + 20% Εργασία**

Στην περίπτωση που κάποιος συμμετάσχει σε περισσότερους από ένα συνδυασμούς τότε σαν τελικός βαθμός θα καταχωρηθεί ο καλύτερος από τους παραπάνω. Αν κάποιος έχει συμμετάσχει μόνο σε μία πρόοδο από τις Α' και Β' και έχει προβιβάσιμο βαθμό αυτό θα συνεκτιμηθεί θετικά για τις περιπτώσεις β και γ.

Οι ασκήσεις της εργασίας έχουν μονάδες με περίπου την ίδια βαρύτητα που είχαν όταν τέθηκαν σε εξετάσεις. Έτσι η τελική βαθμολογία για την εργασία θα προκύψει από το άθροισμα των επιμέρους μονάδων και την τελική αναγωγή: **400 μονάδες = 10**

Πως θα γράψετε την εργασία

Αφού εκτυπώσετε αυτό το αρχείο να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας και τον αριθμό μητρώου σας στην πρώτη σελίδα. Να γράψετε τις λύσεις των ασκήσεων κάτω από τις αντίστοιχες εκφωνήσεις όσο μπορείτε πιο αναλυτικά, γράφοντας αναλυτικές επεξηγήσεις με λόγια γιά ότι κάνετε, φυσικά όχι περιττές λεπτομέρειες, αλλά αρκετά πράγματα ώστε να φαίνεται γιατί χρησιμοποιείται αυτός και όχι εκείνος ο τύπος. Να δείχνετε με εξαιρετικά αναλυτικό τρόπο όλες τις ολοκληρώσεις ή παραγωγίσεις που θα χρειαστεί να κάνετε. Άν χρειαστείτε επιπλέον χώρο για κάποια άσκηση, τότε να προσθέσετε επιπλέον σελίδα(ες) και να αριθμήσετε κατάλληλα, π.χ. μετά την σελίδα 5 θα βάλετε 5α, 5β, 5γ κλπ

Δεν είναι απαραίτητο να εκτυπώσετε και να παραδώσετε μαζί με τις λύσεις των ασκήσεων και τις αρχικές σελίδες που περιέχουν τις οδηγίες συγγραφής και τα παραδείγματα.

Αν στοχεύετε σε υψηλή βαθμολογία μέσω της εργασίας θα πρέπει να προσέξετε μια σειρά από πράγματα όταν θα γράψετε την εργασία. Για να επιτύχετε όμως υψηλή βαθμολογία θα πρέπει να προσέξετε ιδιαιτέρως τις παρακάτω παρατηρήσεις. Οι παρατηρήσεις δεν αφορούν μόνο την εργασία αλλά είναι γενικότερες και αφορούν τις εξετάσεις του μαθήματος γενικά.

Προσοχή στις πράξεις ανάμεσα στους αριθμούς και ανάμεσα στις μονάδες

Οι πράξεις θα πρέπει να φαίνονται αναλυτικά και να προσπαθείτε να κάνετε απλοποιήσεις όπως δείχνεται στα λυμένα παραδείγματα. Όσον αφορά τις μονάδες θα πρέπει να προσπαθείτε να κάνετε αναλυτικά τους μετασχηματισμούς μεταξύ τους έτσι ώστε με απλοποιήσεις να καταλήγετε στις τελικές μονάδες του μεγέθους που υπολογίζετε. Στα λυμένα παραδείγματα δείχνεται πως μετατρέπουμε και απλοποιούμε στην συνέχεια τις μονάδες έτσι ώστε να καταλήξουμε στην τελική μονάδα μέτρησης. Μια καλή πρακτική είναι να γράφουμε σε ξεχωριστά κλάσματα τους αριθμούς και τις μονάδες έτσι ώστε μετά τις μετατροπές των μονάδων να κάνουμε τα σύνθετα κλάσματα απλά και στην συνέχεια να κάνουμε απλοποιήσεις. Αυτή η τεχνική σίγουρα δίνει σωστό αποτέλεσμα και καταλήγουμε να βρίσκουμε στο τέλος την μονάδα μέτρησης του μεγέθους που υπολογίζουμε. Δεν είναι δυνατόν π.χ. να υπολογίζουμε ένταση ηλεκτρικού ρεύματος και στο τέλος να γράφουμε μονάδα μέτρησης Volt !!!!!!!! Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να είστε προσεχτικοί στα σύμβολα και στις μονάδες μέτρησης των διαφόρων μεγεθών που εμφανίζονται στους τύπους. Θα βρείτε (σχεδόν) όλα τα σύμβολα και τις αντίστοιχες μονάδες που χρησιμοποιούνται στο βιβλίο που χρησιμοποιούμε για το μάθημα στο Παράρτημα Α του βιβλίου.

Προσοχή στα σύμβολα

Τα διανύσματα να γράφονται πάντοτε με ένα βελάκι από πάνω. Στα τυπωμένα κείμενα είναι συνήθως σε όρθια μορφή και **bold** όπως π.χ. $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{x}}$, όμως όταν γράφουμε χειρόγραφα επειδή δεν μπορούμε να γράφουμε bold χαρακτήρες βάζουμε οπωσδήποτε το βελάκι, δηλαδή γράφουμε οπωσδήποτε την μορφή $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{x}$, $\vec{r}$.

Τα μέτρα των διανυσμάτων γράφονται στα τυπωμένα κείμενα με *italics* αλλά και με το σύμβολο της απόλυτης τιμής δηλαδή δύο κάθετες γραμμές που περικλείουν το σύμβολο του διανύσματος π.χ. $r = |\vec{r}|$, $E = |\vec{E}|$, αλλά και $r = |\mathbf{r}|$, $E = |\vec{\mathbf{E}}|$. Στο χειρόγραφο κείμενο λοιπόν καλά είναι να γράφουμε r, E, B κλπ. Υπενθυμίζεται ότι τα σύμβολα $\vec{\mathbf{E}}$ και $\vec{E}$ είναι ταυτόσημα όπως είναι και το r με το $|\vec{r}|$. Το μέτρο ενός διανύσματος δίνεται από την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των συνιστωσών του στο τετράγωνο, δηλαδή π.χ. για το τυχαίο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ που συμβολίζει την απόσταση από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή γιά το διάνυσμα

$$\vec{r} = \vec{\mathbf{r}} = (x, y, z) = \hat{\mathbf{x}}\, x + \hat{\mathbf{y}}\, y + \hat{\mathbf{z}}\, z$$

το μέτρο του είναι

$$r = |\vec{r}| = |\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

ενώ γιά το διάνυσμα $\vec{\mathbf{E}}$ που γράφεται

$$\vec{E} = \vec{\mathbf{E}} = (E_x, E_y, E_z) = \hat{\mathbf{x}} E_x + \hat{\mathbf{y}} E_y + \hat{\mathbf{z}} E_z$$

το μέτρο του είναι

$$E = |\vec{E}| = |\vec{\mathbf{E}}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)^{1/2}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα γράφονται στα τυπωμένα κείμενα συνήθως σε όρθια μορφή και **bold** όπως π.χ. $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{r}}$, έχουν δηλαδή και ένα "καπελάκι" (hat) από πάνω, όμως όταν γράφουμε χειρόγραφα επειδή δεν μπορούμε να γράφουμε bold χαρακτήρες βάζουμε οπωσδήποτε το καπελάκι, δηλαδή γράφουμε οπωσδήποτε την μορφή $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, $\hat{r}$ κλπ.

Τα διανύσματα, το μέτρο τους και τα μοναδιαία διανύσματα συνδέονται με τις σχέσεις

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|} = \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Δηλαδή τα διανύσματα σε σχέση με το μέτρο τους και τα μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν την κατεύθυνσή τους γράφονται και ως εξής

$$\vec{\mathbf{r}} = |\vec{\mathbf{r}}|\hat{\mathbf{r}} = \vec{r} = |\vec{r}|\hat{r} = r\hat{r}$$

Ειδικά για το μοναδιαίο διάνυσμα θέσης, χρήσιμος είναι και ο ακόλουθος τρόπος γραφής με χρήση των καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$\hat{r} = \hat{\mathbf{r}} = \frac{\hat{\mathbf{x}}\, x + \hat{\mathbf{y}}\, y + \hat{\mathbf{z}}\, z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\hat{\mathbf{x}}\, x + \hat{\mathbf{y}}\, y + \hat{\mathbf{z}}\, z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\hat{\mathbf{x}}\, x + \hat{\mathbf{y}}\, y + \hat{\mathbf{z}}\, z}{r}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα θέσης εμφανίζεται σε πολλούς τύπους, όπως π.χ. ο τύπος που δίνει την ένταση $\vec{\mathbf{E}}$ του ηλεκτροστατικού πεδίου σε ένα σημείο που έχει συντεταγμένες (x, y, z)

και απέχει r την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων και που οφείλεται σε ένα σημειακό φορτίο Q που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, δηλαδή

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\hat{r} = \vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Ο παραπάνω τρόπος γραφής του μοναδιαίου διάνυσμα θέσης επιτρέπει να εκφραστεί ο τύπος της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες, που είναι χρήσιμες σε αρκετά προβλήματα, ως εξής:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\ r^2}\frac{\hat{\mathbf{x}}\,x + \hat{\mathbf{y}}\,y + \hat{\mathbf{z}}\,z}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{x}}\,x + \hat{\mathbf{y}}\,y + \hat{\mathbf{z}}\,z}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{x}}\,x + \hat{\mathbf{y}}\,y + \hat{\mathbf{z}}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Ο παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να γράφουμε τις συνιστώσες της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες και να έχουμε π.χ. για την E_x συνιστώσα την έκφραση

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

και αντίστοιχες εκφράσεις για τις E_y και E_z.

Σταθερές:

Όπου εμφανίζονται οι παρακάτω σταθερές μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις τιμές που δίνονται εδώ:

Διηλεκτρική σταθερά του κενού:
$\epsilon_0 = 1/(36\pi)\,\mathrm{nF\,m^{-1}} = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$,

Μαγνητική διαπερατότητα του κενού:
$\mu_0 = 400\pi\,\mathrm{nH\,m^{-1}} = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$,

Ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (και του φωτός) στο κενό:
$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Οι μονάδες στις σταθερές έχουν γραφτεί με το τρόπο που συνηθίζεται στο Διεθνές Σύστημα μονάδων (International System of Units ή σύντομα SI). Στο σύστημα αυτό γράφουμε συνήθως τις μονάδες με αρνητικό εκθέτη π.χ. γράφουμε $\mathrm{F\,m^{-1}}$ αντί για F/m ή γράφουμε το Coulomb μόνο με C αντί για Cb, αλλού πάλι κάποιος μπορεί να γράψει τα Ampere μόνο με A ή Amp. Για την εργασία αλλά και για τις εξετάσεις μπορείτε να υιοθετήσετε όποιο σύμβολο σας βολεύει αρκεί όμως να είναι το ΣΩΣΤΟ για το μέγεθος που αναφέρεται στο πρόβλημα που λύνετε!! Προσπαθείστε δε να έχετε ενιαίο τρόπο συμβολισμού, δηλαδή όχι να γράφετε κάπου Volt και λίγο πιό πέρα να βάζετε μόνο V.

Καλή Επιτυχία !!!

Νικόλαος Πετρόπουλος

Υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1: (20 μονάδες) Ένα ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την σχέση $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{y}} \cos y$. Να χρησιμοποιήσετε τις κατάλληλες εξισώσεις του Maxwell και να αποδείξετε ότι το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο **B** είναι στατικό, δηλαδή δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Λύση

Η πρώτη εξίσωση του Maxwell, ο νόμος της επαγωγής του Faraday,

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{1}$$

είναι η σχέση που συνδέει τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία $\vec{\mathbf{E}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$. Χρησιμοποιούμε τον τελεστή ∇

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

και δημιουργούμε το εξωτερικό γινόμενο του τελεστή ∇ με το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$,

$$\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}}E_x + \hat{\mathbf{y}}E_y + \hat{\mathbf{z}}E_z \tag{3}$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \tag{4}$$

Επειδή όμως το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ δίνεται από την σχέση $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{y}} \cos y$, συμπεραίνουμε ότι οι συνιστώσες $E_x = E_z = 0$, ενώ η συνιστώσα $E_y = \cos y$, άρα οι παρακάτω όροι του αναπτύγματος του $\nabla \times \vec{\mathbf{E}}$ είναι μηδέν, δηλαδή

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

Οι δύο εναπομείναντες όροι θάναι επίσης μηδέν γιατί $E_y = \cos y = E_y(y)$, δηλαδή εφόσον η E_y είναι συνάρτηση μόνο του y, οι μερικές του παράγωγοι ως προς x και z θάναι μηδέν, δηλαδή

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \ , \tag{6}$$

και επομένως τελικά όλοι οι όροι του αναπτύγματος είναι μηδέν.

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = 0 \ . \tag{7}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι αφού η χρονική μεταβολή του $\vec{\mathbf{B}}$, δηλαδή η παράγωγός του ως προς τον χρόνο, είναι μηδέν αυτό σημαίνει ότι αυτό το μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}$ δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο δηλαδή αυτό το πεδίο είναι ένα στατικό μαγνητικό πεδίο.

Σημαντική (γενική) παρατήρηση:

Στην παραπάνω σχέση που δίνεται από την εξίσωση (4), για να υπολογίσουμε το $\nabla \times \vec{\mathbf{E}}$ έχουμε χρησιμοποιήσει απευθείας την σχέση που ορίζει το το $\nabla \times \vec{\mathbf{E}}$ δηλαδή το curl του $\vec{\mathbf{E}}$. Ομως το $\nabla \times \vec{\mathbf{E}}$ για ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{\mathbf{E}}$ δίνεται σε αναλογία και με το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ($\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{D}}$) από τον μνημονικό κανόνα του αναπτύγματος σε ελάσσονες(μικρότερες) ορίζουσες, όπως δείχνεται παρακάτω:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{\mathbf{E}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{(1+1)}\hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_y & E_z \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)}\hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_z \end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)}\hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ E_x & E_y \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\
&= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή αναπτύσσουμε την ορίζουσα που ορίζει το $\nabla \times \vec{\mathbf{E}}$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Οι εκθέτες στο (-1) μπροστά από τις ελάσσονες ορίζουσες σημαίνουν την γραμμή και στήλη που βρίσκονται οι όροι ως προς τους οποίους αναπτύσσουμε, δηλαδή τα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ οπότε π.χ. για το $\hat{\mathbf{y}}$ έχουμε εκθέτη στο (-1) το 1+2 γιατί το $\hat{\mathbf{y}}$ βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και δεύτερη στήλη. Οι ελάσσονες ορίζουσες προκύπτουν αν "σβήσουμε" νοητά την γραμμή και στήλη που ανήκει το στοιχείο ως προς το οποίο αναπτύσσουμε. Άρα στο παράδειγμά μας αν σβήσουμε" νοητά την γραμμή και στήλη που ανήκει το $\hat{\mathbf{y}}$ μένει η 2×2 ορίζουσα με την οποία πολλαπλασιάζουμε το $\hat{\mathbf{y}}$.

Φυσικά σε ασκήσεις όταν γνωρίζουμε τον τύπο δεν τον αποδεικνύουμε κάθε φορά. Αυτό το κάνουμε όταν ο τύπος για το curl δεν είναι διαθέσιμος, οπότε τον δημιουργούμε με τον μνημονικό κανόνα του αναπτύγματος σε ορίζουσες. Η ίδια τεχνική, δηλαδή το ανάπτυγμα σε ορίζουσες, χρησιμοποιείται και γιά του υπολογισμό του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων.

Άσκηση 2: (20 μονάδες) Ένας αγωγός απείρου μήκους βρίσκεται στο κενό και διαρρέεται από ρεύμα $I = 10\,\mathrm{A}$. Ο αγωγός ταυτίζεται με τον άξονα z, το κέντρο του συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και η φορά του ρεύματος που τον διαρρέει είναι προς την θετική κατεύθυνση του άξονα z. Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου (μέτρο, διεύθυνση, φορά) στο σημείο Α (6, 8, 0). Να σχεδιαστούν ποιοτικά οι δυναμικές γραμμές αυτού του πεδίου. Οι αποστάσεις στο σύστημα συντεταγμένων εκφάζονται σε μονάδες του μήκους του SI δηλαδή σε m.

Λύση

Η ένταση $\vec{H}$ του μαγνητικού πεδίου που παράγεται από έναν αγωγό απείρου μήκους που βρίσκεται στο κενό και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I, σε ένα σημείο που απέχει απόσταση r από τον αγωγό, δίνεται από τη σχέση

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{\phi}\ .$$

Επειδή ο αγωγός ταυτίζεται με τον άξονα z και το κέντρο του συμπίπτει με την αρχή των αξόνων Ο (0, 0, 0), η διανυσματική απόσταση του σημείου Α (6, 8, 0) από τον αγωγό θα είναι

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} = (6\hat{x} + 8\hat{y} + 0\hat{z}) - (0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}) = 6\hat{x} + 8\hat{y}$$

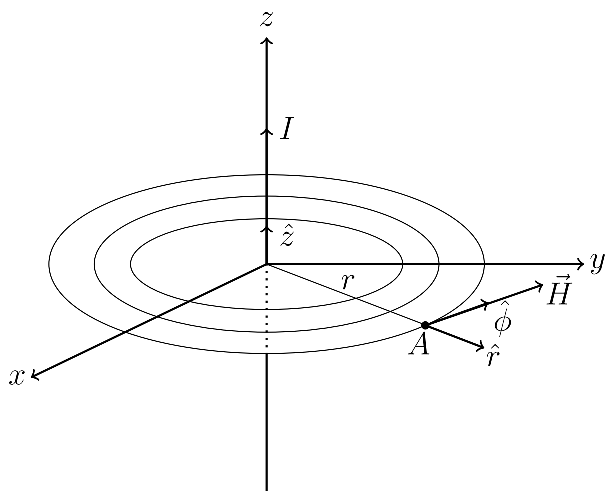
Οπότε η απόσταση r θα είναι το μέτρο του διανύσματος $\vec{r}$, δηλαδή

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

Για να υπολογίσουμε το μέτρο H της έντασης του μαγνητικού πεδίου $\vec{H}$ αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην παραπάνω σχέση οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} H &= \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \\ &= \frac{\cancel{10}}{2 \cdot 3.14 \cdot \cancel{10}}\,\frac{A}{m} \\ &= 0.1591\,\frac{A}{m} \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε αντικαταστήσει την τιμή του $r = 10\,m$. Η διεύθυνση και η φορά του διανύσματος $\vec{H}$ είναι αυτή που δείχνεται στο παρακάτω σχήμα



Δηλαδή η διεύθυνση του διανύσματος $\vec{H}$ είναι είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν ο άξονας z και το διάνυσμα $\vec{r}$ και η φορά του δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Το διάνυσμα $\vec{H}$ έχει δηλαδή την διεύθυνση και φορά του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\phi}$ των κυλινδρικών συντεταγμένων. Τούτο συμβαίνει γιατί το μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$ δίνεται μέσω του Νόμου Biot-Savart σαν το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\hat{z} \times \hat{r}$ για το οποίο ισχύει $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi}$. Ο Νόμος Biot-Savart διατυπώνεται μέσω της σχέσης

$$\Delta\vec{H} = \frac{I \Delta z \, \hat{z} \times \hat{r}}{4\pi \, r^2} = \frac{I \Delta z}{4\pi \, r^2} \hat{\phi}$$

Άσκηση 3: (20 μονάδες) Μία γραμμική κατανομή φορτίου με άπειρο μήκος, βρίσκεται στο κενό, το κέντρο της συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και η διεύθυνσή της είναι αυτή του άξονα z. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου της κατανομής είναι $0,12 \cdot 10^{-5}$ Cb/m. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (μέτρο, διεύθυνση, φορά) στο σημείο A (0, 3, 0). Οι αποστάσεις στο σύστημα συντεταγμένων εκφάζονται σε μονάδες μήκους του SI δηλαδή σε μέτρα (m).

Λύση

Σύμφωνα με την θεωρία η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathbf{E}}$ σε ένα σημείο που απέχει απόσταση r από μια γραμμική κατανομή φορτίου με ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου λ, άπειρο μήκος και η οποία βρίσκεται στο κενό, δίνεται από την σχέση

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} \ .$$

Επειδή η γραμμική κατανομή φορτίου ταυτίζεται με τον άξονα z και το κέντρο της συμπίπτει με την αρχή των αξόνων O (0, 0, 0), η διανυσματική απόσταση του σημείου A (0, 3, 0) από την γραμμική κατανομή θα είναι

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} = (0\hat{x} + 3\hat{y} + 0\hat{z}) - (0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}) = 3\hat{y}$$

Οπότε η απόσταση r που είναι το μέτρο του διανύσματος $\vec{r}$, θα είναι

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

ενώ το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{r}$ θα είναι

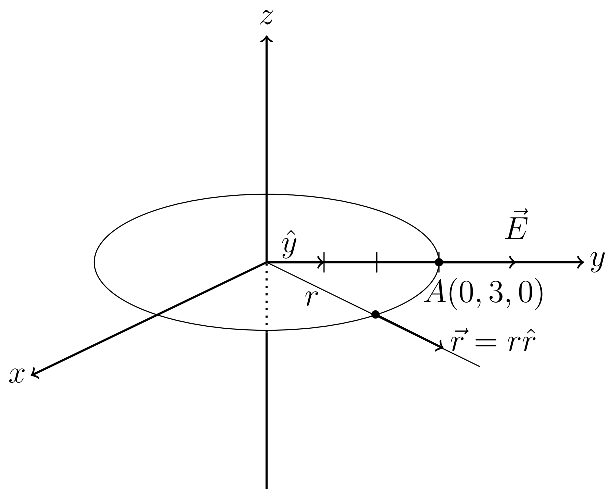
$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{3\hat{y}}{3} = \hat{y}$$

δηλαδή η διεύθυνση του πεδίου στο σημείο A (0, 3, 0) θα είναι αυτή του άξονα y και η φορά του ίδια με το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα δηλαδή $\hat{y}$.

Για να υπολογίσουμε το μέτρο E της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathbf{E}}$ αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην παραπάνω σχέση οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \\
&= \frac{0.12 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot \pi \cdot \dfrac{1}{36 \cdot \pi} \cdot 3} \ \frac{\dfrac{Cb}{m}}{\dfrac{nF}{m}\, m} = \frac{0,12 \cdot 10^{-5}}{\cancel{\pi} \cdot \dfrac{2 \cdot 3}{36 \cdot \cancel{\pi}}} \ \frac{\dfrac{Cb}{m}}{\dfrac{nF}{\cancel{m}}\, \cancel{m}} \\
&= \frac{0,12 \cdot 10^{-5}}{\dfrac{6}{36}} \ \frac{Cb}{nF \cdot m} = \frac{0,12 \cdot 10^{-5}}{\dfrac{1}{6}} \ \frac{Cb}{nF \cdot m} \\
&= \frac{6 \cdot 0,12 \cdot 10^{-5}}{10^{-9}} \ \frac{Cb}{F \cdot m} = 0,72 \cdot 10^{-5} 10^{9} \ \frac{V}{m} \\
&= 0,72 \cdot 10^{4} \ \frac{V}{m} = 7,2 \cdot 10^{3} \ \frac{V}{m}
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε αντικαταστήσει την τιμή του $r = 3\,\mathrm{m}$, γιατί οι αποστάσεις εκφάζονται σε μονάδες του SI και άρα σε m. Η διεύθυνση και η φορά του διανύσματος $\vec{E}$ είναι αυτή που δείχνεται στο παρακάτω σχήμα



Γενικά για το συγκεκριμένο πρόβλημα της γραμμικής κατανομής φορτίου, το διάνυσμα $\vec{\mathbf{E}}$ της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου θα έχει την διεύθυνση και φορά του διανύσματος θέσης $\vec{\mathbf{r}}$ του σημείου στο οποίο αναζητούμε να υπολογίσουμε το πεδίο. Στην περίπτωση της άσκησης το διάνυσμα θέσης συμπίπτει με το άξονα y και άρα η ένταση του πεδίου έχει την ίδια διεύθυνση με τον άξονα y και φορά την φορά του μοναδιαίου διανύσματος του άξονα αυτού προς την θετική του κατεύθυνση δηλαδή του $\hat{\mathbf{y}}$. Επομένως η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Α (0, 3, 0) είναι σε V/m

$$\vec{\mathbf{E}} = 7.2 \cdot 10^3 \hat{\mathbf{y}}$$

Άσκηση 1: (25 μονάδες) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{x}}\,5x + \hat{\mathbf{y}}\,6xy + \hat{\mathbf{z}}\,x^3$. Να υπολογιστούν τα: $\nabla \times \vec{\mathbf{A}}$, $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}$ και $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{A}})$.

Λύση

Άσκηση 2: (25 μονάδες) Δίνεται η βαθμωτή συνάρτηση $\phi = \phi(x, y, z) = xyz$. Να υπολογιστούν τα: $\nabla\phi$, $\nabla \cdot \nabla\phi$ και $\nabla \times \nabla\phi$.

Λύση

Άσκηση 3: (20 μονάδες) Ένα μαγνητικό πεδίο δίνεται από την σχέση $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}\ \cos y + \hat{\mathbf{z}}\, cos z$. Να χρησιμοποιήσετε την κατάλληλη εξίσωση του Maxwell για να αποδείξετε ότι αυτό το μαγνητικό πεδίο **B** δεν μπορεί να υπάρξει στο εσωτερικό της σφαίρας που έχει κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα $r = 1\,\mathrm{m}$.

Λύση

Άσκηση 4: (35 μονάδες) Μία γραμμική κατανομή φορτίου απείρου μήκους (που βρίσκεται στο κενό) έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου $\rho_l = 3.3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$. Η γραμμή φορτίου είναι παράλληλη με τον άξονα z και το κέντρο της βρίσκεται στο σημείο Α (3, 4, 0). Ένα σημειακό φορτίο Q βρίσκεται κάπου στον χώρο και απέχει απόσταση $r = 2\,\mathrm{m}$ από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Να βρεθεί το φορτίο Q και η θέση του έτσι ώστε το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων να είναι μηδενικό.

Λύση

Άσκηση 5: (25 μονάδες) Ένας αγωγός απείρου μήκους βρίσκεται στο κενό και διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I = 2.8\,\mathrm{A}$. Να βρεθεί σε πόση απόσταση από αυτόν δημιουργείται μαγνητικό πεδίο που έχει μέτρο $B = 56\,\mu\mathrm{T}$. Να σχεδιαστούν ποιοτικά οι δυναμικές γραμμές αυτού του πεδίου. Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στην ένταση $\vec{\mathbf{H}}$ και την πυκνότητα της μαγνητικής ροής $\vec{\mathbf{B}}$ αυτού του μαγνητικού πεδίου, αλλά και γενικά για οποιοδήποτε μαγνητικό πεδίο; Να υπολογιστεί το μέτρο της έντασης H του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση $r = 0.02\,\mathrm{m}$ από τον αγωγό .

Λύση

Άσκηση 6: (25 μονάδες) Εάν σε μια περιοχή του χώρου το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την σχέση $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}\, E_0\, e^{-jkx}$ να χρησιμοποιήσετε τις κατάλληλες εξισώσεις του Maxwell και να υπολογίσετε το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο **B**. Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό το μαγνητικό πεδίο ικανοποιεί την εξίσωση του Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Λύση

Άσκηση 7: (35 μονάδες) Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται με ταχύτητα v που έχει κατεύθυνση $\hat{\mathbf{x}}$ δηλαδή $v = v_0\,\hat{\mathbf{x}}$ μέσα σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B που έχει κατεύθυνση $-\hat{\mathbf{z}}$ δηλαδή $B = -B_0\,\hat{\mathbf{z}}$. Να δώσετε τον ορισμό της δύναμης Lorentz και να υπολογίσετε την δύναμη Lorentz $\vec{\mathbf{F}}$ που δέχεται αυτό το σωματίδιο (μέτρο, διεύθυνση και φορά). Εξηγείστε γιατί το σωματίδιο θα διαγράψει κυκλική τροχιά, και να υπολογίσετε την ακτίνα αυτής της τροχιάς. Τι συμπεραίνετε για την γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου. Αν σε αυτό το μαγνητικό πεδίο εισέλθουν φορτισμένα σωματίδια τα οποία έχουν το ίδιο φορτίο αλλά κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες να περιγράψετε την κίνησή τους. (Εξηγείστε με σχήματα)

Λύση

Άσκηση 8: (10 μονάδες) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας των πλακών ενός επίπεδου πυκνωτή πού έχει χωρητικότητα $C = 100\,\mathrm{pF}$ και είναι γεμάτος με διηλεκτρικό υλικό πού έχει σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon = 4\epsilon_0$. Η απόσταση ανάμεσα στις των πλάκες του πυκνωτή είναι 35 μm .

Λύση

Άσκηση 9: (10 μονάδες) Αν το ρεύμα που διαρρέει έναν αγωγό απείρου μήκους (που βρίσκεται στο κενό) είναι $I = 0.4\,\mathrm{A}$, να βρεθεί σε πόση απόσταση από αυτόν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $B = 4\,\mu\mathrm{T}$. Να σχεδιαστούν ποιοτικά οι γραμμές αυτού του πεδίου.

Λύση

Άσκηση 10: (10 μονάδες) Αν η ενέργεια που μπορεί να αποθηκευτεί σε πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα $I = 5\,\mathrm{A}$ είναι $W = 125\,\mathrm{J}$, να βρεθεί η τιμή της αυτεπαγωγής του πηνίου.

Λύση

Άσκηση 11: (10 μονάδες) Σε πόση απόσταση από μία γραμμή απείρου μήκους (που βρίσκεται στο κενό), γραμμικής πυκνότητας φορτίου $\rho_l = 16 \times 10^{-5}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$, το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι $E = 2 \times 10^{6}\,\mathrm{V\,m^{-1}}$;

Λύση

Άσκηση 12: (10 μονάδες) Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο ενός σωληνοειδούς είναι $B = 4.0 \times 10^{-3}$T. Αν το ρεύμα που το διαρρέει είναι $I = 5$A να βρεθεί ο αριθμός των σπειρών ανά μονάδα μήκους του σωληνοειδούς. (Το εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι γεμάτο αέρα).

Λύση

Άσκηση 13: (25 μονάδες) **α)** (5 μονάδες) Τι ονομάζουμε ρεύμα μετατόπισης και τι ρεύμα αγωγιμότητας ή μεταφοράς. **β)** (20 μονάδες) Αν σε μια περιοχή του χώρου η πυκνότητα της ηλεκτρικής ροής $\vec{\mathbf{D}}$ είναι στατική, δηλαδή δεν μεταβάλλεται χρονικά, πόσο είναι το ρεύμα μετατόπισης; Σε αυτή την περιοχή το μαγνητικό πεδίο (η ένταση του μαγνητικού πεδίου) δίνεται από την σχέση:

$$\vec{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{y}}\, 2x^2 + \hat{\mathbf{z}}\, 4xy \ .$$

Να χρησιμοποιηθεί η κατάλληλη εξίσωση του Maxwell και να υπολογιστεί η πυκνότητα του ρεύματος αγωγιμότητας στα σημεία M(1, 0, 1) και N(2, 0, 2). Ποιόν βασικό νόμο του ηλεκτρομαγνητισμού εκφράζει η εξίσωση που χρησιμοποιήθηκε.

Λύση

Άσκηση 14: (35 μονάδες) **α)** (5 μονάδες) Να γράψετε την κυματική εξίσωση που υπακούει η ηλεκτρική συνιστώσα (δηλαδή το πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$) ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στο κενό, αν είναι γνωστό ότι αυτό το πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ είναι παράλληλο προς τον άξονα y και είναι συνάρτηση μόνο του x. **β)** (10 μονάδες) Να γράψετε μία πιθανή λύση αυτής της κυματικής εξίσωσης και να αποδείξετε με αντικατάσταση ότι η συνάρτηση που προτείνετε είναι πράγματι λύση της κυματικής εξίσωσης. **γ)** (5 μονάδες) Πως προκύπτει η εξίσωση διασποράς γι αυτό το κύμα και τι σχέση έχει η εξίσωση διασποράς με την πιθανή λύση της κυματικής εξίσωσης που προτείνετε παραπάνω. **δ)** (15 μονάδες) Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλη εξίσωση του Maxwell και να υπολογίσετε την μαγνητική συνιστώσα (δηλαδή την ένταση $\vec{\mathbf{H}}$ του μαγνητικού πεδίου) αυτού ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Να εκφράσετε το πλάτος του $\vec{\mathbf{H}}$ σαν συνάρτηση της ενδογενούς αντίστασης του απόλυτου κενού.

Λύση

Άσκηση 15: (35 μονάδες) **α)** (10 μονάδες) Να διατυπώσετε την σχέση ανάμεσα στην διαφορά δυναμικού V μεταξύ δύο σημείων ενός ηλεκτροστατικού πεδίου $\vec{\mathbf{E}}$ και στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αυτού του πεδίου από το ένα σημείο στο άλλο. Πώς υπολογίζεται αυτό το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα; **β)** (25 μονάδες) Ένα ηλεκτροστατικό πεδίο που εκτείνεται σε όλο τον χώρο δίνεται από την σχέση $\vec{\mathbf{E}} = E_0\hat{\mathbf{y}}$, ενώ το μέτρο του είναι $E_0 = 5\,\mathrm{V\,m^{-1}}$. Να χρησιμοποιήσετε την απάντησή σας στο πρώτο ερώτημα για να υπολογίσετε την διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία του χώρου M(1, 0, 0) και N(6, 6, 0) ακολουθώντας τρείς διαφορετικές διαδρομές: **A)** την διαδρομή MΛN όπου Λ είναι το σημείο Λ(6, 0, 0), **B)** την διαδρομή MKN με K το σημείο K(1, 6, 0) και **Γ)** την διαδρομή MZHΘN μέσω των σημείων Z(3, 0, 0), H(3, 1, 0) και Θ(6, 1, 0). Να συγκρίνετε τις απαντήσεις για κάθε διαδρομή. Τι συμπεραίνετε και γιατί συμβαίνει αυτό που παρατηρείτε; **Υπόδειξη:** Να σχεδιάσετε τα σημεία σε ένα σχήμα για να διευκολυνθείτε στον υπολογισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων.

Λύση

Άσκηση 16: (10 μονάδες) Να αποδείξετε ότι ένα ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ μπορεί να αναπαρασταθεί από την κλίση (grad) μιάς βαθμωτής (δηλαδή όχι διανυσματικής) συνάρτησης Φ. Να εξηγήσετε δηλαδή γιατί το ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ ορίζεται μέσω της σχέσης $\vec{\mathbf{E}} = -\nabla\Phi$.

Λύση

Άσκηση 17: (35 μονάδες) Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο ομόκεντρες σφαίρες με ακτίνες r_1 και r_2 ($r_1 < r_2$). Αν η εσωτερική σφαίρα περιέχει φορτίο $Q = 10\,\mathrm{nC}$, να αποδείξετε (κάνοντας αναλυτικά τις πράξεις στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων) ότι η χωρητικότητα του πυκνωτή δίνεται από την σχέση:

$$C = 4\pi\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Πόσο είναι το φορτίο της εξωτερικής σφαίρας και τι σχέση έχει η χωρητικότητα του πυκνωτη με τα φορτία των σφαιρών. Να υπολογίσετε την χωρητικότητα αυτού του πυκνωτή σε nF και pF αν είναι γνωστό ότι $r_1 = 3\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 4\,\mathrm{cm}$ και ότι ο χώρος ανάμεσα στις ομόκεντρες σφαίρες περιέχει μονωτικό υλικό διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon = 0.6\,\epsilon_0$.

Λύση

Άσκηση 18: (20 μονάδες): Ένα ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την σχέση $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{z}} \cos z$. Να χρησιμοποιήσετε τις κατάλληλες εξισώσεις του Maxwell και να αποδείξετε ότι το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}$ είναι στατικό, δηλαδή δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Λύση