ΒΙΟΛΟΓΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ

Επιμέλεια - προσαρμογή : **Α. Καναπίτσας**

Βιβλιογραφία :

1. Ελπινίκη Παπαγεωργίου Σημειώσεις – Παρουσίαση : **“Μελέτη της απαγωγής βιοϊατρικούσήματος, εφαρμογή σε θεραπευτικά μηχανήματα και ανάλυση απεικονιστικών μεθόδων”.** Τηλεκπαίδευση ΤΕΙ ΛΑΜΙΑΣ

2. Δ.Κουτσουρής, Σ.Παυλόπουλος, Α.Πρέντζα, **Εισαγωγή στην βιοϊατρική τεχνολογία και ανάλυση ιατρικών σημάτων**, Αθήνα 2003.

3. Δ.Κουτσουρής, Κ.Νικήτα, Σ.Παυλόπουλος, **Ιατρικά απεικονιστικά συστήματα**, Αθήνα 2003.

4. Α.Πρέντζα **Γενικές αρχές επεξεργασίας βιολογικών σημάτων** παρουσίαση,ΕΜΠ, Εργαστήριο Βιοιατρικής Τεχνολογίας, 2002

Τι είναι σήμα;

- Σήμα είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους
- Ένα σήμα εκφράζει την κατάσταση ενός συστήματος που εξελίσσεται
- Παραδείγματα σημάτων
  - Φωνή
  - Ηλεκτροκαρδιογράφημα (ECG)
- Τα σήματα περιέχουν Πληροφορία

Κατηγορίες σημάτων

- Σήματα συνεχούς χρόνου
- Σήματα συνεχούς χρόνου - διακριτού πλάτους
- Σήματα διακριτού χρόνου
- Ψηφιακά σήματα

Επεξεργασία σήματος

- Ως “επεξεργασία σήματος” ονομάζουμε το σύνολο των μεθόδων που εφαρμόζονται κατά το χειρισμό σημάτων
- Στόχοι
  - Εξαγωγή της πληροφορίας που φέρουν τα σήματα
  - Μεταβολή του σήματος αυτού καθ’ εαυτού
- Τα σήματα αναπαρίστανται σα χρονικές ή/και χωρικές συναρτήσεις

Σήμα είναι ένα φαινόμενο το οποίο **μεταφέρει πληροφορία**.

Τα βιολογικά σήματα είναι σήματα που χρησιμοποιούνται στο πεδίο της βιοϊατρικής, κυρίως για την εξαγωγή πληροφορίας για το υπό εξέταση βιολογικό σύστημα.

Πολύ συχνά στις βιοϊατρικές εφαρμογές η λήψη του σήματος δεν είναι αρκετή.

Απαιτείται η **επεξεργασία** του για την **εξαγωγή της πληροφορίας** που είναι "θαμμένη" σε αυτό.

Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι το σήμα περιέχει **θόρυβο** και επομένως πρέπει να "**καθαριστεί**", ή στο γεγονός ότι η σχετική **πληροφορία δεν είναι "ορατή"** στο σήμα.

Στην τελευταία περίπτωση, συνήθως εφαρμόζουμε κάποιο **μετασχηματισμό** έτσι ώστε να *«μεγεθύνουμε» τη σχετική πληροφορία*

και να *εξάγουμε παραμέτρους* που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος

Τεχνικές που χρησιμοποιούνται : στο πεδίο του *χρόνου* και
στο πεδίο της *συχνότητας*,

- εφαρμογή φίλτρων,
- εκτίμηση της μέσης τιμής
- και υπολογισμό φάσματος.

Ακόμα και αν είναι δυνατό να έχουμε συνεχές σήμα, καλύτερα είναι να το μετατρέπουμε σε μια ακολουθία αριθμών (**ψηφιακό**).

Η πρόσφατη πρόοδος της τεχνολογίας τόσο σε επίπεδο υλικού, όσο και σε επίπεδο λογισμικού έχει κάνει πιο αποτελεσματική και εύκολη την **ψηφιακή** επεξεργασία παρά την αναλογική.

Πλεονεκτήματα: μεγάλη απόδοση,
δυνατότητα να υλοποιηθούν πολύπλοκοι αλγόριθμοι,
η ακρίβεια εξαρτάται μόνο από τα λάθη στρογγυλοποίησης,

Επίσης αποφεύγεται ο παράγοντας της αλλοίωσης της πληροφορίας από διάφορες απρόβλεπτες μεταβλητές, όπως η ηλικία και η θερμοκρασία του στοιχείου που χρησιμοποιείται.

Τέλος, οι σχεδιαστικές παράμετροι ενός ψηφιακού συστήματος μπορούν εύκολα να αλλάξουν, καθώς περιέχουν περισσότερο λογισμικό παρά υλικό.

ΒΙΟΛΟΓΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ

➢Ανάλογα με την πηγή προέλευσης τα βιολογικά σήματα χωρίζονται σε:

➢Σήματα τα οποία παράγονται από την ηλεκτρική δραστηριότητα νευρικών και μυϊκών κυττάρων.

➢Σήματα τα οποία προκαλούνται από κάποια μηχανική λειτουργία του βιολογικού συστήματος.

Βιολογικά σήματα (Βιοσήματα)

Βιοσήματα: οι έξοδοι βιολογικών διεργασιών σε κάθε ζωντανό οργανισμό.

Αυτά τα σήματα μπορεί να είναι:

- ηλεκτρικά, όπως η εκπόλωση μιας νευρικής ή μυϊκής κυτταρικής μεμβράνης
- μηχανικά, όπως η πίεση αίματος στο κυκλοφορικό σύστημα
- χημικά, όπως οι πιέσεις των αερίων αίματος PO_2 και PCO_2.

Βιοσήματα

Τα βιοσήματα είναι συνήθως κρυμμένα μαζί με άλλα σήματα και θόρυβο.

- 50 Hz δικτύου
- θόρυβος από μετακινήσεις

Είναι σήματα μικρού εύρους.

Οι βιολογικές διεργασίες που παράγουν τα βιοσήματα είναι πολύπλοκες και δυναμικές με πολλές συνεχώς μεταβαλλόμενες παραμέτρους.

Επομένως: είναι απαραίτητη η επεξεργασία των βιοσημάτων για την εξαγωγή πληροφορίας.

Βιοσήματα

- Η επεξεργασία των βιοσημάτων έχει σαν σκοπό να φιλτράρει το σήμα που ενδιαφέρει από τον υπάρχοντα θόρυβο και να μειώσει το πλεόνασμα δεδομένων σε λίγες παραμέτρους.
- Οι παράμετροι που προκύπτουν μπορεί να έχουν ενδιαφέρον στην υποστήριξη της ιατρικής διάγνωσης ή στη διερεύνηση της βιολογικής διαδικασίας.

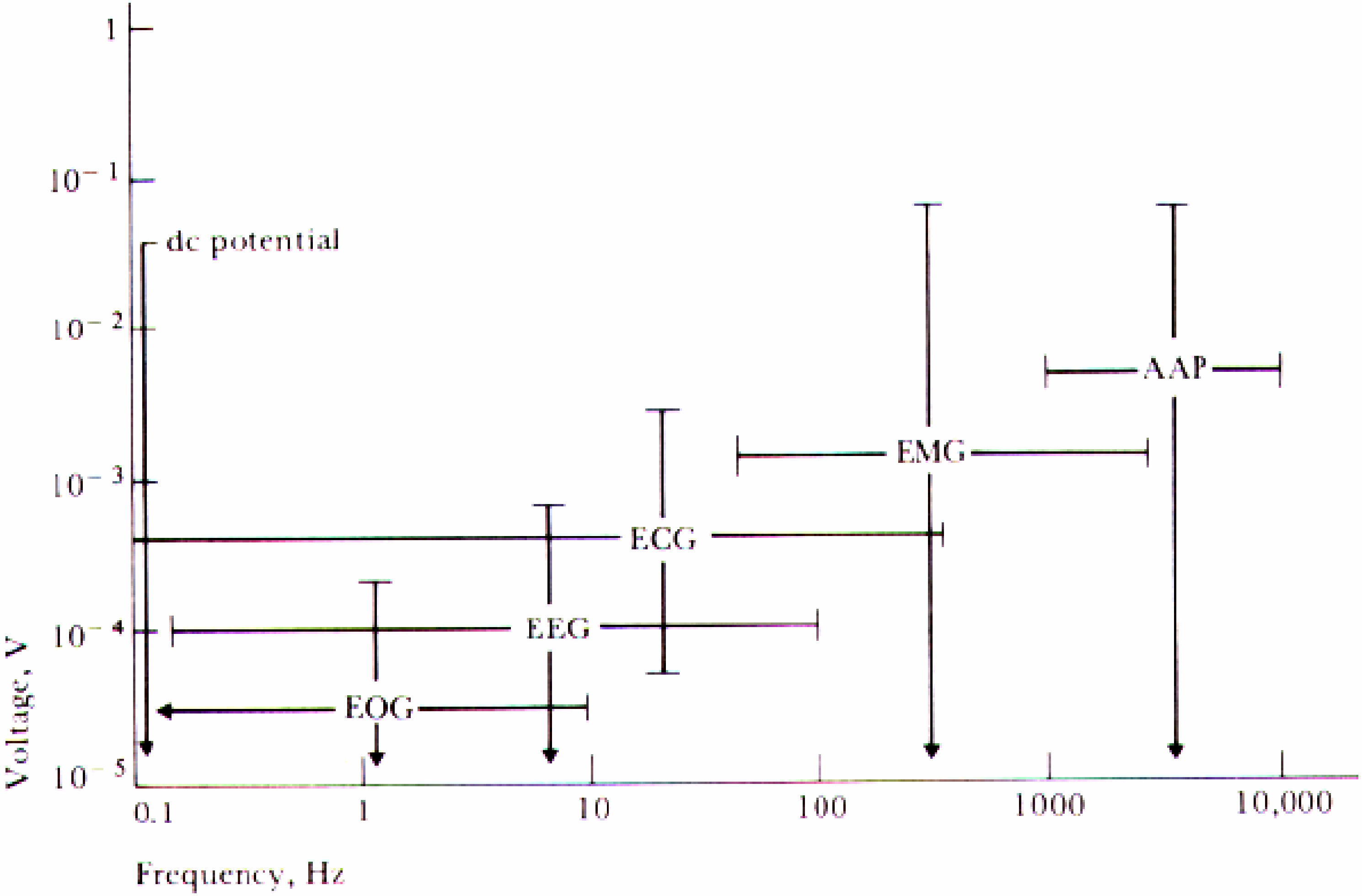
Βιολογικά Σήματα

- Σήματα μικρού εύρους - ανάγκη μεγάλης ενίσχυσης
- Φάσμα συχνοτήτων 0-100 Hz
- Σήματα με θόρυβο:
  - 50 Hz δικτύου
  - θόρυβος από μετακινήσεις
- Η πληροφορία δεν μπορεί να εξαχθεί άμεσα από το καταγραφόμενο σήμα

Ταξινόμηση	Τρόπος Λήψης	Εύρος συχνοτήτων	Δυναμικό Εύρος	Σχόλια
Δυναμικό Δράσης	Μικροηλεκτρόδια	**100 Hz - 2 Hz**	**10μV - 100mV**	Επεμβατική μέτρηση δυναμικού κυτταρικής μεμβράνης
Επιφανείας	Ηλεκτρόδια Επιφανείας	**0,5 – 100 Hz**	**2 – 100μV**	
Ρυθμός Δέλτα		**0,5 - 4 Hz**		Παιδιά, βαθύς ύπνος και παθολογίες
Ρυθμός Θήτα		**4 – 8 Hz**		Κροταφικές και κεντρικές περιοχές σε κατάσταση ετοιμότητας
Ρυθμός Άλφα		**8 - 13 Hz**		Ξυπνητός, χαλαρός, κλειστά μάτια
Ρυθμός Βήτα		**13 - 22 Hz**		
Προκλητά Δυναμικά (ΕΡ)	Ηλεκτρόδια Επιφανείας		**0.1- 20μV**	Απόκριση δυναμικού εγκεφάλου σε ερέθισμα
Οπτικά (V E P)		**1 - 300 Hz**	**1- 20μV**	Καταγραφές ινιακού λοβού
Ακουστικά (A E P)		**100 Hz – 3 KHz**	**0,5- 10μV**	
Σωματοαισθητικά (S E P)		**2 Hz – 3 KHz**		

Ταξινόμηση	Τρόπος Λήψης	Εύρος συχνοτήτων	Δυναμικό Εύρος	Σχόλια
Μιας ίνας	Βελονοειδή Ηλεκτρόδια	500 Hz – 10 KHz	1- 10mV	
Μιας κινητικής μονάδας	Βελονοειδή Ηλεκτρόδια	5 Hz – 10 KHz	100μV – 2mV	Δυναμικά δράσης από μία μυϊκή ίνα
Επιφανειακό	Ηλεκτρόδια Επιφάνειας	2 – 500 Hz	50μV- 5mV	
Ηλεκτροκαρδιογράφημα (Η Κ Γ)	Ηλεκτρόδια Επιφάνειας	0,05 – 100 Hz	1 – 10mV	
Πίεση αίματος	Μετατροπείς			Συνήθως η μέτρηση γίνεται επεμβατικά

Πλάτη & Συχνότητες Βιολογικών Σημάτων



Κατηγορίες σημάτων

- Σήματα συνεχούς χρόνου
- Σήματα συνεχούς χρόνου - διακριτού πλάτους
- Σήματα διακριτού χρόνου
- Ψηφιακά σήματα

Επεξεργασία σήματος

- Ως “επεξεργασία σήματος” ονομάζουμε το σύνολο των μεθόδων που εφαρμόζονται κατά το χειρισμό σημάτων
- Στόχοι
  - Εξαγωγή της πληροφορίας που φέρουν τα σήματα
  - Μεταβολή του σήματος αυτού καθ’ εαυτού
- Τα σήματα αναπαρίστανται σα χρονικές ή/και χωρικές συναρτήσεις

- Τα **συνεχή σήματα** περιγράφονται από μία **συνεχή συνάρτηση *s(t)*** η οποία παρέχει πληροφορία για το σήμα οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

- Τα διακριτά σήματα περιγράφονται από μία ακολουθία s(m) η οποία παρέχει πληροφορία σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.

- Τα περισσότερα από τα βιολογικά σήματα είναι συνεχή.
- Επειδή όμως η σύγχρονη τεχνολογία παρέχει δυναμικά εργαλεία για επεξεργασία διακριτών σημάτων, πολύ συχνά μετατρέπουμε ένα συνεχές σήμα σε διακριτό με τη διαδικασία της δειγματοληψίας.

- Ένα συνεχές σήμα s(t) μετατρέπεται στην ακολουθία s(m) με την ακόλουθη σχέση:
- $\boldsymbol{s(m) = s(t)|_{t=mTs}} \quad m = \ldots,-1,0,1,\ldots$
- (1)
- όπου ***Ts*** είναι η περίοδος δειγματοληψίας και ***fs = (2π/Ts)*** είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.

- Επίσης μπορούμε να διαχωρίσουμε τα σήματα σε δύο μεγάλες κατηγορίες:
- ***ντετερμινιστικά*** και ***στοχαστικά*** σήματα. Τα ντετερμινιστικά σήματα είναι σήματα τα οποία μπορούν να περιγραφούν ακριβώς με μαθηματικό ή γραφικό τρόπο. Αν ένα σήμα είναι ντετερμινιστικό και δίνεται η μαθηματική του περιγραφή, δεν μεταφέρει καμία πληροφορία. Τα πραγματικά σήματα δεν είναι ποτέ ντετερμινιστικά. Υπάρχει πάντα κάποιος άγνωστος και απρόβλεπτος θόρυβος, κάποια απρόβλεπτη αλλαγή στις παραμέτρους και στα υποκείμενα χαρακτηριστικά του σήματος που το καθιστούν μη ντετερμινιστικό. Εντούτοις, είναι πολύ συχνά “βολική” η προσέγγιση ή η μοντελοποίηση ενός σήματος με τη χρήση μιας ντετερμινιστικής συνάρτησης.

- Επίσης μπορούμε να διαχωρίσουμε τα σήματα σε δύο μεγάλες κατηγορίες:
- ***ντετερμινιστικά*** και ***στοχαστικά*** σήματα.

- Τα ντετερμινιστικά σήματα είναι σήματα τα οποία μπορούν να περιγραφούν ακριβώς με μαθηματικό ή γραφικό τρόπο.
- Αν ένα σήμα είναι ντετερμινιστικό και δίνεται η μαθηματική του περιγραφή, δεν μεταφέρει καμία πληροφορία.
- Τα πραγματικά σήματα δεν είναι ποτέ ντετερμινιστικά. Υπάρχει πάντα κάποιος άγνωστος και απρόβλεπτος θόρυβος, κάποια απρόβλεπτη αλλαγή στις παραμέτρους και στα υποκείμενα χαρακτηριστικά του σήματος που το καθιστούν μη ντετερμινιστικό. Εντούτοις, είναι πολύ συχνά “βολική” η προσέγγιση ή η μοντελοποίηση ενός σήματος με τη χρήση μιας ντετερμινιστικής συνάρτησης

- Μια σημαντική οικογένεια ντετερμινιστικών σημάτων είναι τα περιοδικά σήματα.
- Περιοδικό σήμα είναι ένα ντετερμινιστικό σήμα το οποίο μπορεί να εκφρασθεί από τη σχέση:

  $s(t) = s(t + nT)$ (2)

  όπου n είναι ένας ακέραιος και T είναι η περίοδος.

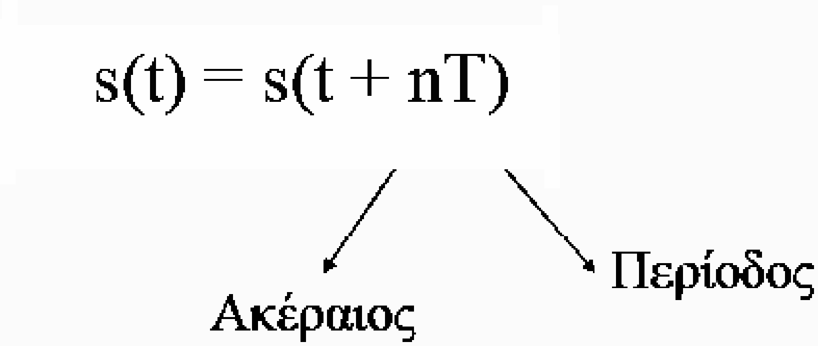
- Το περιοδικό σήμα αποτελείται από μια βασική κυματομορφή με διάρκεια T δευτερόλεπτα.

  Αυτή η βασική κυματομορφή επαναλαμβάνεται άπειρες φορές στον άξονα του χρόνου.

  Το πιο απλό περιοδικό σήμα είναι το ημιτονοειδές σήμα.

  Κάτω από ορισμένες συνθήκες, το σήμα της πίεσης αίματος μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα σύνθετο περιοδικό σήμα, με περίοδο τη διάρκεια ενός καρδιακού παλμού και την κυματομορφή του ενός παλμού ως τη βασική κυματομορφή που επαναλαμβάνεται. Βέβαια, αυτό είναι ένα γενικό και ανακριβές μοντέλο.
- Οι περισσότερες ντετερμινιστικές συναρτήσεις είναι μη περιοδικές. Μερικές φορές, αξίζει να θεωρήσουμε ένα “σχεδόν περιοδικό” τύπο σήματος. Το ΗΚΓ μπορεί
- να θεωρηθεί ως “σχεδόν περιοδικό”. Το διάστημα RR του ΗΚΓ δεν είναι ποτέ σταθερό, και μία PQRST κυματομορφή είναι σχεδόν όμοια σε κάθε καρδιακό παλμό.

Περιοδικά Σήματα

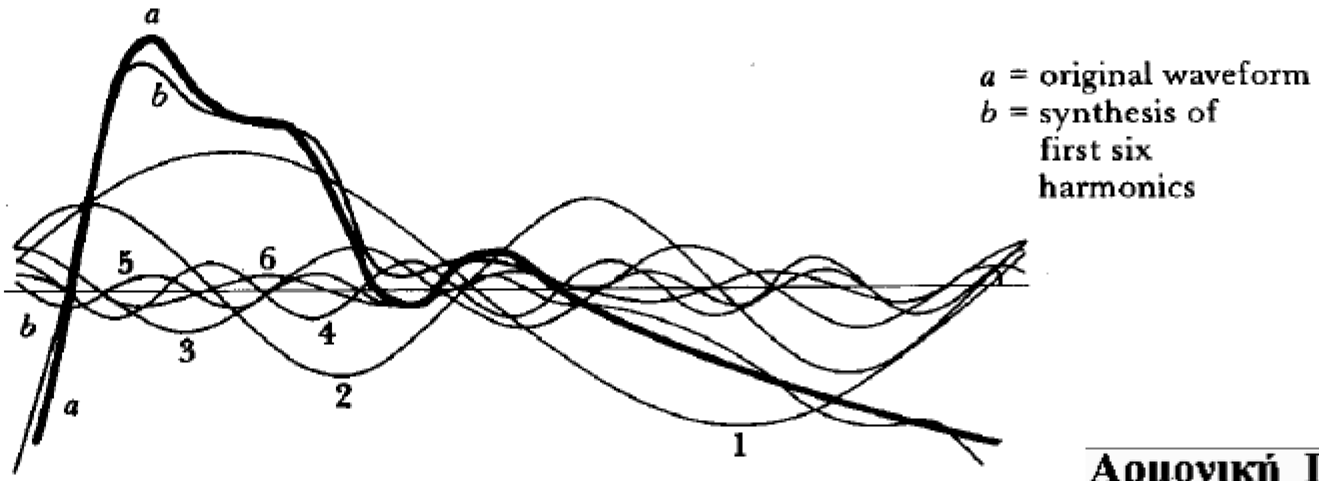


$$s(t) = s(t + nT)$$

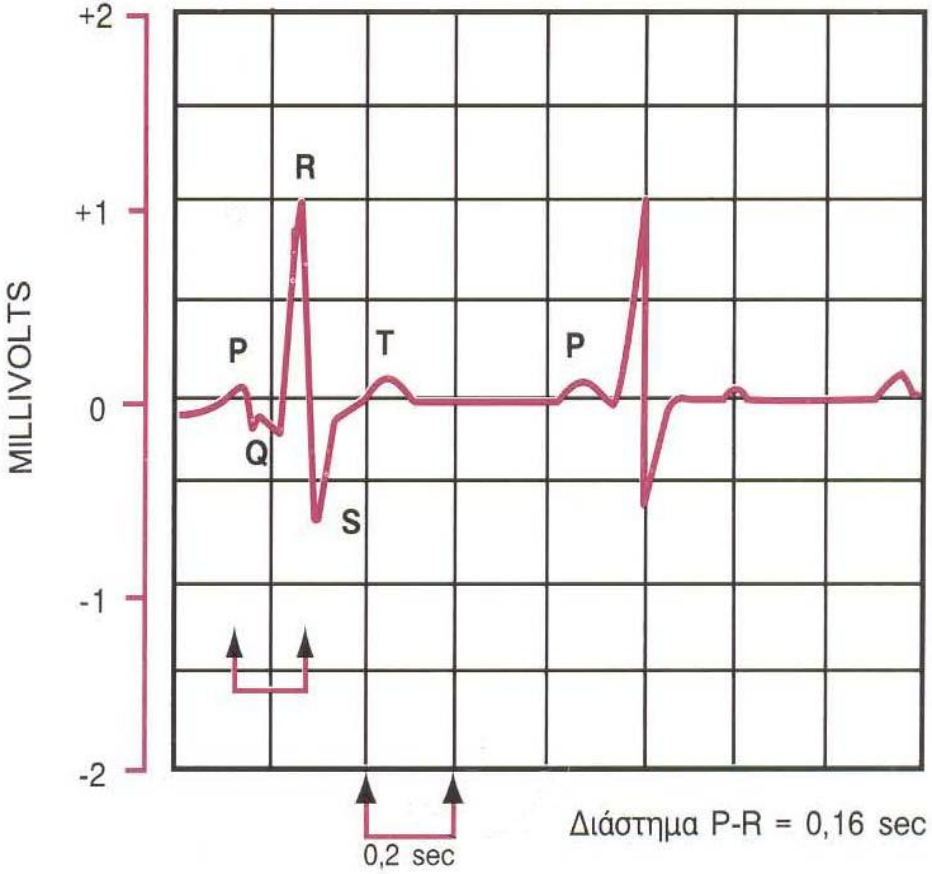
- Το περιοδικό σήμα αποτελείται από μία βασική κυματομορφή διάρκειας T seconds.
- Η βασική κυματομορφή επαναλαμβάνεται άπειρες φορές στον άξονα του χρόνου.
- Το πιο απλό περιοδικό σήμα είναι το ημιτονοειδές σήμα.

«Σχεδόν» Περιοδικά Σήματα

Οι πρώτες 6 αρμονικές της κυματομορφής αρτηριακής πίεσης :



Αρμονική	Πλάτος(%)
1	100
2	63.2
3	29.6
4	22.2
5	14.8
6	11.8



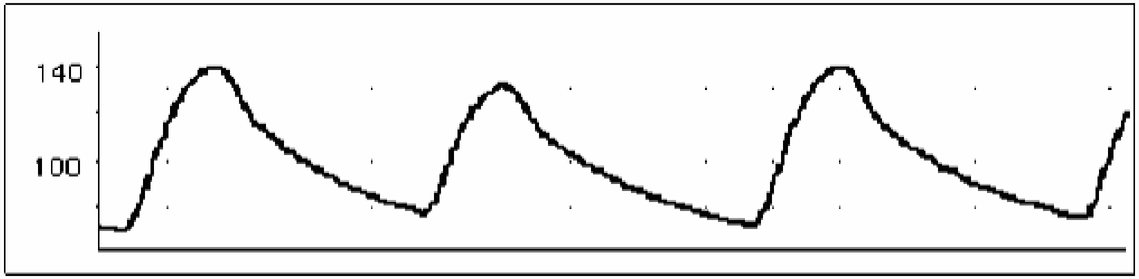
- Το RR διάστημα μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν σταθερό.
- Το PQRST τμήμα μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν το ίδιο σε κάθε παλμό.

Τα χαρακτηριστικά του φυσιολογικού ηλεκτροκαρδιογραφήματος

Το φυσιολογικό ΗΚΓ αποτελείται από ένα κύμα P, ένα σύμπλεγμα QRS και ένα κύμα T.

Το σύμπλεγμα QRS συνήθως αποτελείται από τρία διαφορετικά κύματα, τα Q, R και S, που παράγονται - και τα τρία - από τη διέλευση της καρδιακής διέγερσης από τις κοιλίες.

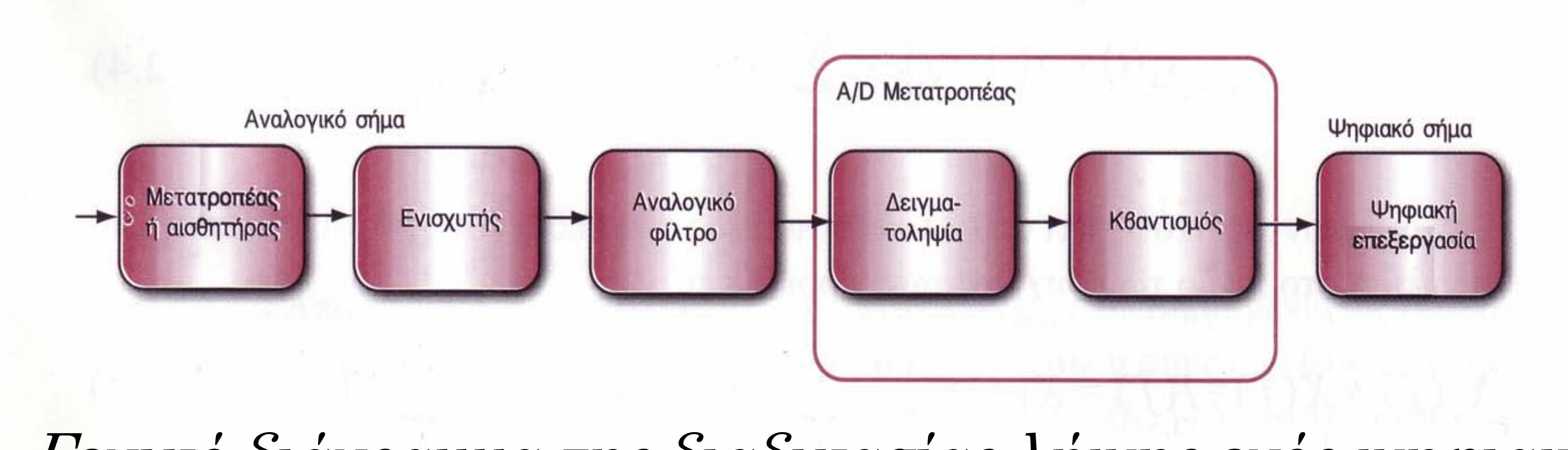
«Σχεδόν» Περιοδικά Σήματα



Σήμα της αρτηριακής πίεσης αίματος : μοντελοποιείται από ένα πολύπλοκο περιοδικό σήμα με:

- τη διάρκεια ενός καρδιακού παλμού ως περίοδο
- την κυματομορφή της πίεσης αίματος ως τη βασική κυματομορφή

Λήψη βιολογικού σήματος



Γενικό διάγραμμα της διαδικασίας λήψης ενός ψηφιακού σήματος.

Το σύστημα λήψης του ψηφιακού σήματος ΔΕΝ πρέπει να εισάγει παραμόρφωση που μπορεί να παρερμηνευθεί ή να καταστρέψει αλλαγές του σήματος που φανερώνουν παθολογικά φαινόμενα.

- Αναλογικό φίλτρο με σταθερό κέρδος και γραμμική φάση
  - αφαιρεί θόρυβο
  - αντισταθμίζει χαρακτηριστικά αισθητήρων

περιορισμός αναλογικού σε εύρος (φαινόμενα αναδίπλωσης)

Διάφορα μεγέθη μετρούνται σε ένα βιολογικό σύστημα.
Αυτά αφορούν ηλεκτρομαγνητικές ποσότητες, αλλά και μηχανικές, χημικές και γενικά μη ηλεκτρικές μεταβλητές (όπως πίεση, θερμοκρασία, κίνηση κ.ά.).

Τα ηλεκτρικά σήματα δειγματοληπτούνται από αισθητήρες (ηλεκτρόδια), ενώ τα μη ηλεκτρικά σήματα μετατρέπονται σε ηλεκτρικά με κατάλληλους μετατροπείς και στη συνέχεια είναι εύκολο να επεξεργαστούν, να μεταδοθούν αλλά και να αποθηκευθούν.

Ένα αναλογικό τμήμα προεπεξεργασίας είναι αναγκαίο να υπάρχει ώστε να δώσει την κατάλληλη ενίσχυση αλλά και να κάνει το κατάλληλο φιλτράρισμα (και το σήμα να μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακό με τη χρήση ενός αναλογικού σε ψηφιακό - A/D - μετατροπέα), αλλά και να αφαιρέσει ποσοστό θορύβου ή να αντισταθμίσει μη επιθυμητά χαρακτηριστικά των αισθητήρων.

Επιπλέον, το αναλογικό σήμα θα πρέπει να περιοριστεί, όσον αφορά το εύρος του και μετά να μετατραπεί σε ψηφιακό. Αυτή η διαδικασία είναι αναγκαία ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα αναδίπλωσης κατά τη δειγματοληψία.

Εδώ είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι είναι αναγκαία η διατήρηση της πληροφορίας που περιέχει η αρχική (πρωτότυπη) συνεχής κυματομορφή.

Αυτό είναι ένα σημαντικό σημείο κατά την εγγραφή βιοϊατρικών σημάτων, των οποίων κάποια χαρακτηριστικά είναι δείκτες για την ύπαρξη παθολογιών.

Έτσι, το σύστημα λήψης του ψηφιακού σήματος δεν πρέπει να εισάγει καμία μορφή παραμόρφωσης που μπορεί να παρερμηνευθεί ή να καταστρέψει αλλαγές του σήματος που φανερώνουν παθολογικά φαινόμενα.

Για το λόγο αυτό, το αναλογικό φίλτρο πρέπει να είναι σχεδιασμένο με σταθερό κέρδος και γραμμική φάση (ή μηδενική), τουλάχιστον όσον αφορά τις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν.
Αυτές οι προϋποθέσεις επιτρέπουν στο σήμα να φτάνει χωρίς παραμόρφωση μέχρι τον A/D μετατροπέα.

Διαδικασία Ψηφιοποίησης

Είσοδος : Συνεχές αναλογικό σήμα

Έξοδος : Ακολουθία αριθμών (ψηφιακή μορφή)

Αναλογικό Σήμα

Δειγματοληψία

Σήμα Διακριτού Χρόνου

Κβαντικοποίηση

Ψηφιακό Σήμα

Διαδικασία Ψηφιοποίησης

- Αναλογικό Σήμα - συνεχής μεταβλητή με άπειρη ακρίβεια - μετατρέπεται σε διακριτή ακολουθία μετρημένων τιμών που αναπαριστάνονται ψηφιακά.
- Απώλεια πληροφορίας

Δειγματοληψία

- Μετατροπή συνεχών σημάτων σε διακριτά

  Η ακολουθία s(m) προκύπτει από το συνεχές σήμα s(t) με δειγματοληψία ως εξής:

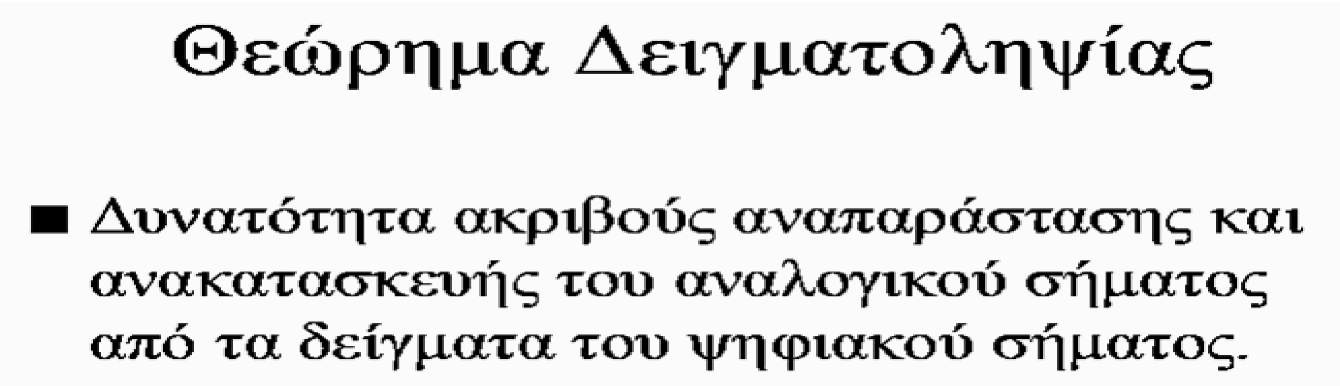
$$s(m) = s(t)\,|_{t=mTs} \quad m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

όπου T_s : περίοδος δειγματοληψίας και

$f_s = 2\pi/T_s$: συχνότητα δειγματοληψίας

➢Το θεώρημα της δειγματοληψίας

Η χρήση του διακριτού σήματος αντί του αναλογικού είναι δυνατή γιατί, υπό ορισμένες παραδοχές, το διακριτό σήμα είναι απόλυτα αντιπροσωπευτικό του αντίστοιχου συνεχούς, αυτού δηλαδή από το οποίο υπολογίσθηκε.



Θεώρημα Δειγματοληψίας

- Δυνατότητα ακριβούς αναπαράστασης και ανακατασκευής του αναλογικού σήματος από τα δείγματα του ψηφιακού σήματος.

Θεώρημα Δειγματοληψίας

Επίσης, θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon ή Nyquist

«Για σωστή αναπαράσταση ενός σήματος θα πρέπει η **συχνότητα δειγματοληψίας**, να είναι τουλάχιστον **διπλάσια** της **μέγιστης συχνότητας** του σήματος».

Για να μπορέσουμε να καταλάβουμε το θεώρημα της δειγματοληψίας, ας θεωρήσουμε ένα **συνεχές σήμα *x*(*t*),** με **μέγιστη συχνότητα f_b**, του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier *X*(*f*) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και ας υποθέσουμε ότι το δειγματοληπτούμε ομοιόμορφα.
Η διαδικασία της δειγματοληψίας μπορεί να μοντελοποιηθεί με τον πολλαπλασιασμό του σήματος επί την παρακάτω συνάρτηση:

$$i(t) = \sum_{k=-\propto,\propto} \delta(t - kTs)$$

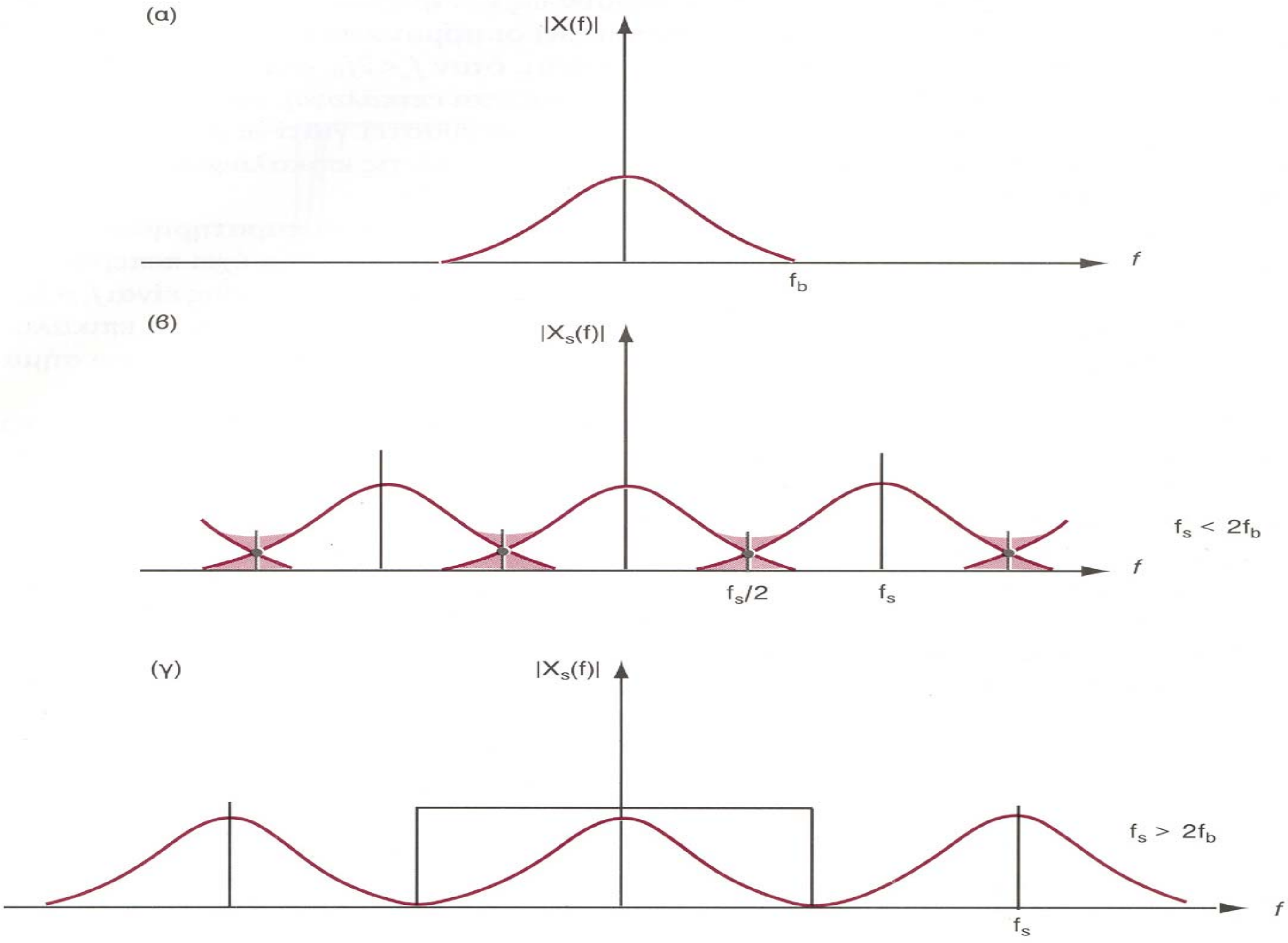
όπου *δ*(*t*) είναι η συνάρτηση Dirac, k ένας ακέραιος και Ts η περίοδος δειγματοληψίας. Το διακριτό σήμα προκύπτει ως εξής:

$$xs(t) = x(t) \cdot i(t) = \sum_{k=-\propto,\propto} x(t) \cdot \delta(t - kTs)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου συνεπάγεται συνέλιξη στο πεδίο των συχνοτήτων, προκύπτει:

$$Xs(f) = X(f) * I(f) = X(f) * \frac{1}{Ts} \cdot \sum_{k=-\propto,\propto} \delta(f - kfs) = \frac{1}{Ts} \cdot \sum_{k=-\propto,\propto} X(f - kfs)$$

όπου *fs* =1/Ts είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.



Αποτέλεσμα της συχνότητας δειγματοληψίας (fs) σε σήμα μέγιστης συχνότητας fb . α) Μετασχηματισμός Fourier του αρχικού σήματος, β) Μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος όταν fs < 2fb γ) Μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος όταν fs > 2fb . Οι σκούρες περιοχές στο (β) υποδηλώνουν τις αναδιπλούμενες συχνότητες.

Έτσι, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα στις περιπτώσεις β, γ, ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος Xs(*f*) είναι και αυτός περιοδικός και αποτελείται από μια σειρά πανομοιότυπων επαναλήψεων του
X(*f*) που έχουν ως κέντρο πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας.

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι αρμονικές συχνότητες του X(*f*) που είναι μεγαλύτερες από την *f*s/2 εμφανίζονται, όταν $fs < 2fb$ διπλωμένες στις χαμηλότερες αρμονικές.

Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται επικάλυψη, και όταν συμβαίνει η αρχική πληροφορία δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί γιατί οι αρμονικές του αρχικού σήματος είναι ανεπανόρθωτα αλλοιωμένες από τις επικαλύψεις των μετατοπισμένων εκδόσεων του X(*f*).

μπορούμε να αποφύγουμε αυτό το φαινόμενο όταν το αρχικό σήμα έχει πεπερασμένο εύρος συχνοτήτων (X(*f*)=0 για $f > fb$) και η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $fs < 2fb$.

Σε αυτή την περίπτωση (όπως φαίνεται και στο σχήμα 3γ) δεν συμβαίνει επικάλυψη και η αρχική κυματομορφή μπορεί να ανακατασκευαστεί από το διακριτό σήμα με χρήση βαθυπερατών φίλτρων.

Η υπόθεση του πεπερασμένου εύρους συχνοτήτων του σήματος συνήθως δεν ισχύει στην πράξη, λόγω των χαρακτηριστικών του σήματος και της επίδρασης θορύβου μεγάλου εύρους.
Είναι πάντα ανάγκη, πριν από τη δειγματοληψία, το σήμα να φιλτράρεται, ακόμα και όταν υποθέτουμε ότι το σήμα μας είναι ήδη πεπερασμένης συχνότητας.

Η υπόθεση του πεπερασμένου εύρους συχνοτήτων του σήματος συνήθως δεν ισχύει στην πράξη, λόγω των χαρακτηριστικών του σήματος και της επίδρασης θορύβου μεγάλου εύρους.

Είναι πάντα ανάγκη, πριν από τη δειγματοληψία, το σήμα να φιλτράρεται, ακόμα και όταν υποθέτουμε ότι το σήμα μας είναι ήδη πεπερασμένης συχνότητας.

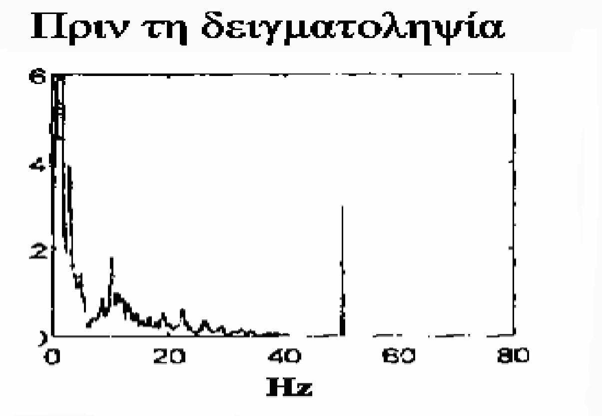
Ας θεωρήσουμε ένα σήμα ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος (ΗΕΓ) όπου το περιεχόμενο των συχνοτήτων ενδιαφέροντος κυμαίνεται από O ως 4OHz

(οι συνήθεις διαγνωστικές ζώνες είναι δ: O-3,5Hz, θ: 4-7Hz, α: 8-13Hz και β: 14-4OHz).

Έστω ότι αποφασίζουμε να χρησιμοποιήσουμε συχνότητα δειγματοληψίας 8OHz (σύμφωνα με το θεώρημα της δειγματοληψίας). Αν γίνει αυτό χωρίς προηγουμένως να έχουμε εφαρμόσει κάποιο φίλτρο στο σήμα μας, είναι πολύ πιθανό να προκύψουν κάποια δυσάρεστα αποτελέσματα.

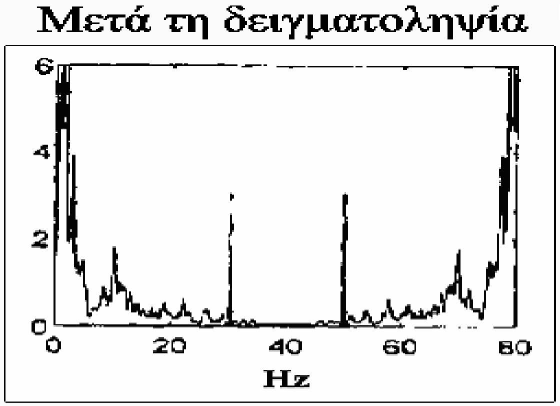
Τυπικά, θόρυβος λόγω παρεμβολών τροφοδοσίας στα 5OHz, θα επαναληφθεί πανομοιότυπα στα 30Hz, αλλοιώνοντας εντελώς το νέο σήμα. Η επίδραση φαίνεται στο σχήμα α (πριν τη δειγματοληψία) και στο σχήμα β (μετά τη δειγματοληψία). Επομένως, η εφαρμογή του αναλογικού φίλτρου, όπως φαίνεται στο σχήμα απαιτείται έτσι ώστε να περιορίσουμε το σήμα μας σε κάποιο συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων πριν τη δειγματοληψία και να αποφύγουμε λάθη επικάλυψης.

Φάσμα ΗΕΓ με συχνότητες ενδιαφέροντος 0-40 Hz



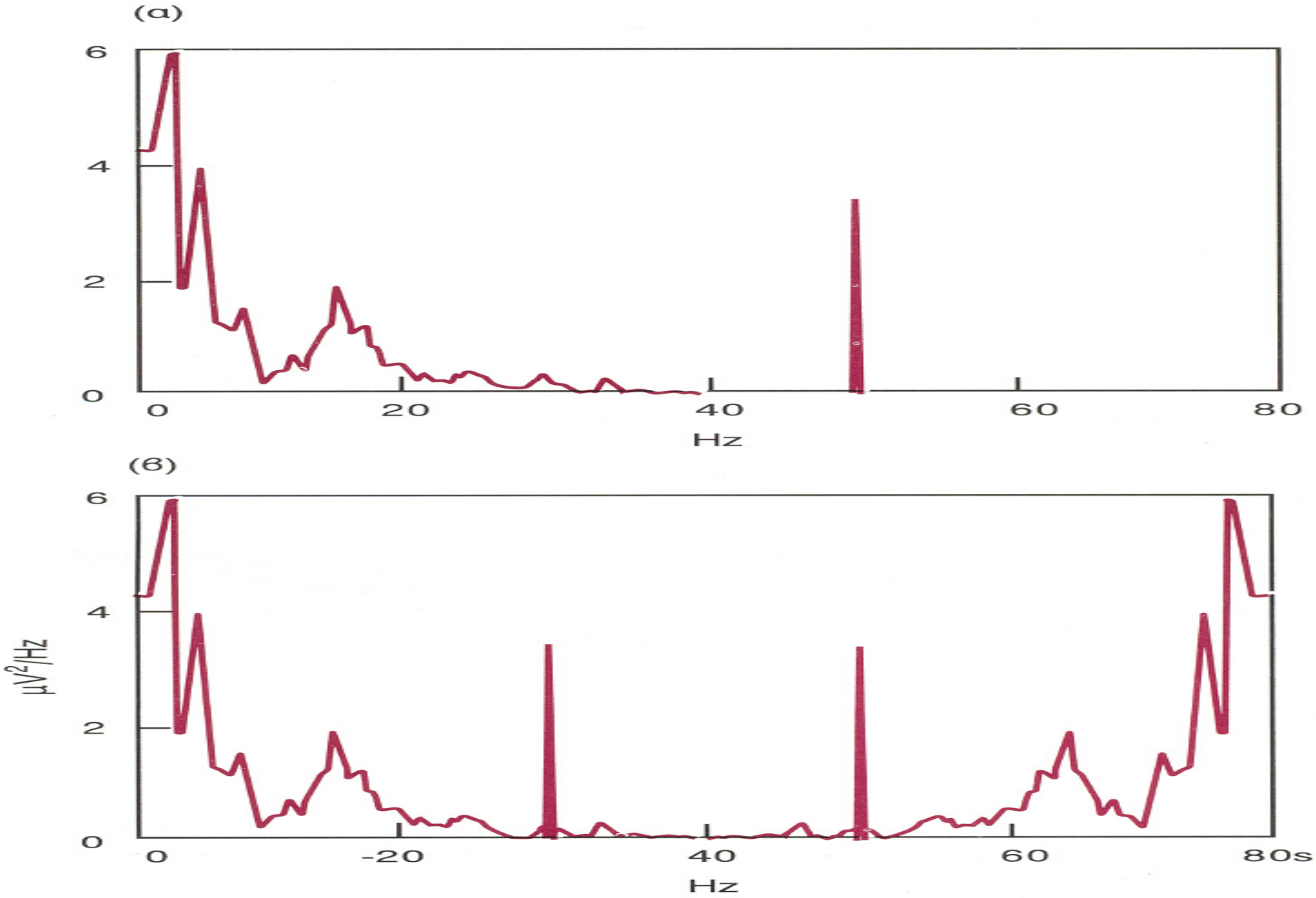
Πριν τη δειγματοληψία

Παρουσία θορύβου λόγω παρεμβολών τροφοδοσίας στα 50 Hz



Μετά τη δειγματοληψία

- Συχνότητα δειγματοληψίας 80 Hz
- Λάθος επικάλυψης στα 30 Hz στο διακριτό σήμα



Φάσμα ενός ΗΕΓ (με περιεχόμενο συχνοτήτων ενδιαφέροντος από 0-4OHz).
Η παρουσία θορύβου λόγω παρεμβολών τροφοδοσίας στα 50 Hz (α)
προκαλεί λάθος επικάλυψης στη συνιστώσα των 30 HZ στο διακριτό σήμα (β) για συχνότητα δειγματοληψίας 80 Hz

Τα αποτελέσματα του κβαντισμού

Ο κβαντισμός παράγει ένα διακριτό σήμα, του οποίου τα δείγματα μπορούν να πάρουν μόνο ορισμένες τιμές ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η κωδικοποίησή τους. Είναι μία καθαρά μη γραμμική διαδικασία της οποίας όμως ευτυχώς τα αποτελέσματα μπορούν να ελεγχθούν με στατιστική μοντελοποίηση. Συνήθως το μη γραμμικό τμήμα αντικαθίσταται από ένα στατιστικό μοντέλο όπου το κβαντικό σφάλμα λαμβάνεται ως πρόσθετος θόρυβος $e(n)$ στο σήμα $x(n)$. Οι παραπάνω υποθέσεις γίνονται για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος με απλά μαθηματικά ως εξής:

1. $e(n)$ είναι λευκός θόρυβος με κανονική κατανομή.
2. Ο θόρυβος $e(n)$ και το σήμα $x(n)$ είναι ασυσχέτιστα σήματα.

Αρχικά πρέπει να τονίσουμε ότι η πυκνότητα πιθανότητας του $e(n)$ αλλάζει ανάλογα με τη διαδικασία κωδικοποίησης. Αν αποφασίσουμε τη στρογγυλοποίηση του πραγματικού δείγματος στο πλησιέστερο κβαντικό επίπεδο έχουμε $-\Delta /2 \leq e(n) < \Delta /2$, ενώ αν αποφασίσουμε να κρατάμε το ακέραιο μέρος του δείγματος έχουμε $-\Delta \leq e(n) <0$, όπου Δ είναι το διάστημα κβαντισμού μεταξύ δύο επιπέδων κβαντισμού.
Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε το λόγο σήματος-θορύβου (SNR) για τη διαδικασία κβαντισμού:

$$SNR = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{2^{-2b}/12}\right) = 6.02b + 10.79 + 10\log_{10}\left(\sigma_x^2\right)$$

έχοντας θέσει $\Delta = 2^{-2b}$, και όπου σ^2 είναι η διακύμανση του σήματος και b είναι το πλήθος των bits που χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση. Πρέπει να τονίσουμε ότι ο λόγο ς σήματος-θορύβου αυξάνεται σχεδόν κατά 6dB για κάθε προστιθέμενο bit κωδικοποίησης.

Κβαντικοποίηση

- Το σήμα διακριτού χρόνου (δείγματα) μετατρέπεται σε ψηφιακό.
- Οι ADC χαρακτηρίζονται από τον αριθμό των bits.
- Ο αριθμός των bits καθορίζει την ακρίβεια των δεδομένων και την ανάλυση (resolution).

Κβαντικοποίηση

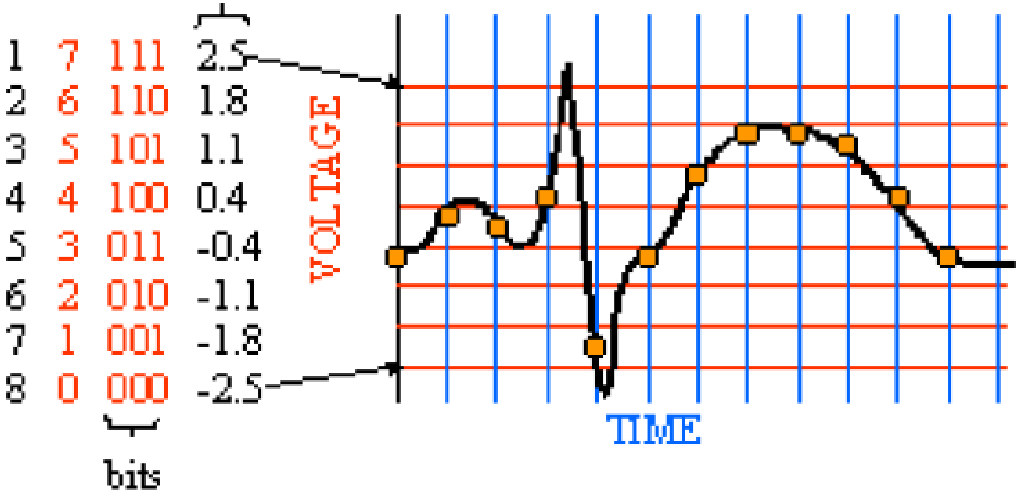
- 12-bit ADC ⇒ Η τάση εισόδου διαιρείται σε 2^{12}-1 τμήματα (4095).
- Έστω ότι το εύρος τάσης πλήρους κλίμακας είναι ± 5 V.
- Άρα: 10 V/4095 bits = 2.44 mV/LSB ανάλυση.
  - LSB: απόσταση μεταξύ διαδοχικών επιπέδων κβαντικοποίησης

Κβαντικοποίηση

3-bit ± 2.5 V ADC

⇨

5 V / (2^3-1) = 5 V / 7 = 0.7 V/LSB



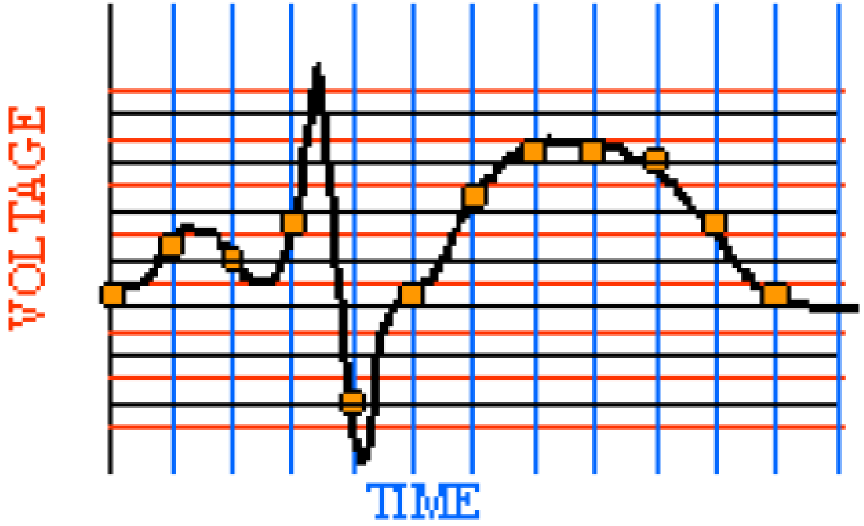
1	7	111	2.5
2	6	110	1.8
3	5	101	1.1
4	4	100	0.4
5	3	011	-0.4
6	2	010	-1.1
7	1	001	-1.8
8	0	000	-2.5

Κβαντικοποίηση

4-bit ± 2.5 V ADC

⇨

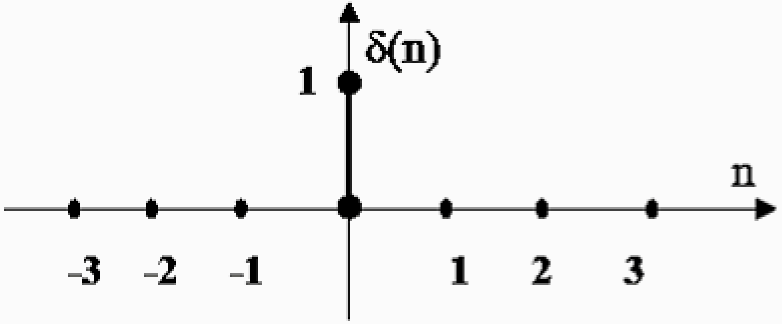
5 V / (2^4-1) = 5 V / 15 = 0.33 V/LSB



Κβαντικοποίηση

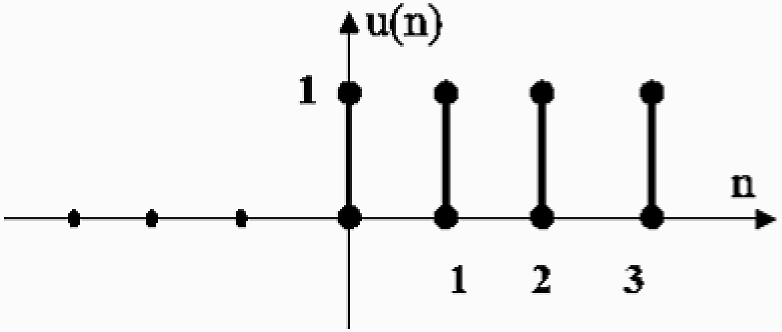
- Λάθος κβαντικοποίησης
  - Μέγιστο λάθος: ± 1/2 LSB
  - Τυχαίος Θόρυβος που προστίθεται στο σήμα
  - Ομοιόμορφα κατανεμημένος μεταξύ ± 1/2 LSB, $\mu=0$, $\sigma=1/\sqrt{12}$ LSB.

Χαρακτηριστικές συναρτήσεις



$$\delta\ (n) = \left\{ \begin{matrix} 1, \forall n = 0 \\ 0, \forall n \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

Κρουστική
ή
Μοναδιαία



$$u(n) = \left\{ \begin{matrix} 1, n \geq 0 \\ 0, n \prec 0 \end{matrix} \right\}$$

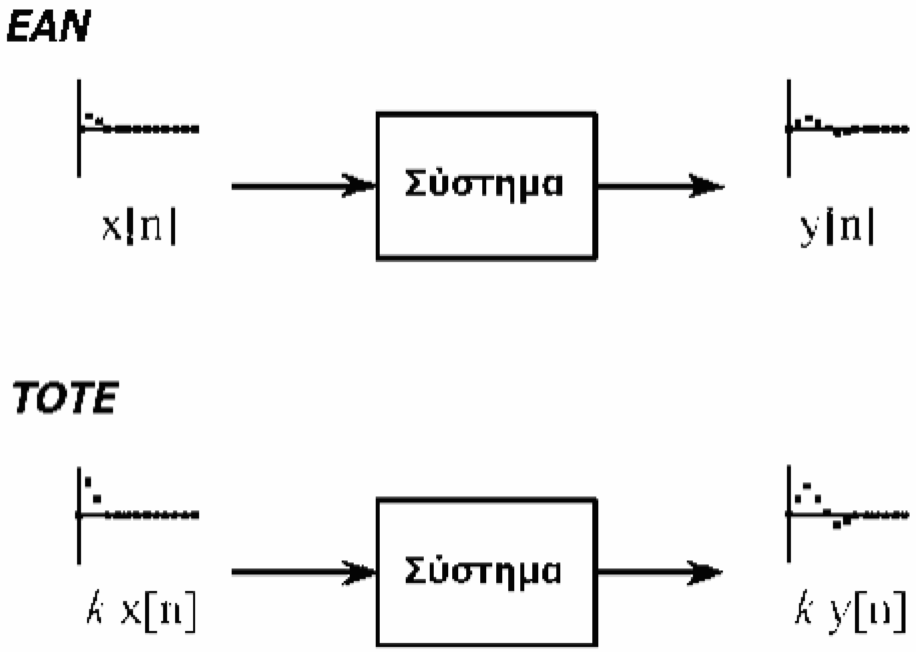
βηματική

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

Γραμμικά Συστήματα – Ιδιότητες

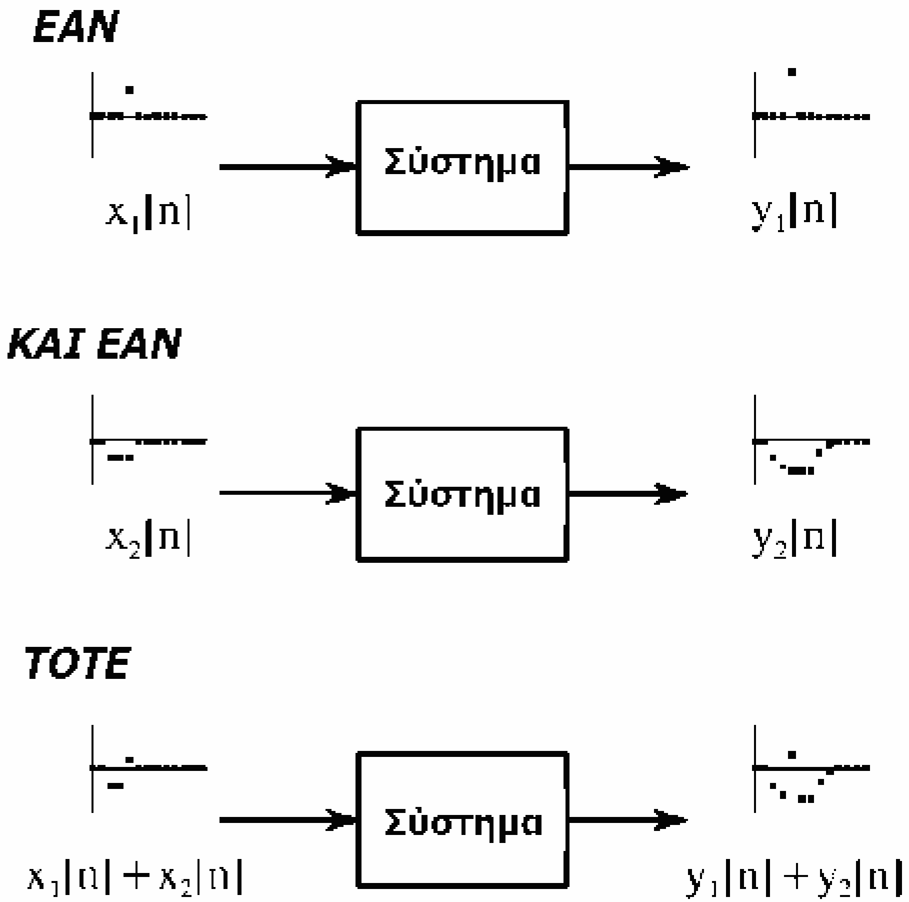
- Ομοιογένεια (Homogeneity)
- Προσθετικότητα (Additivity)
- Χρονική Αμεταβλητότητα (Shift Invariance)

Ομοιογένεια (Homogeneity)



Ένα σύστημα είναι ομοιογενές αν μία αλλαγή πλάτους στην είσοδο έχει ως αποτέλεσμα αντίστοιχη αλλαγή πλάτους στην έξοδο.

Προσθετικότητα (Additivity)



ΕΑΝ

$x_1|n|$ → **Σύστημα** → $y_1|n|$

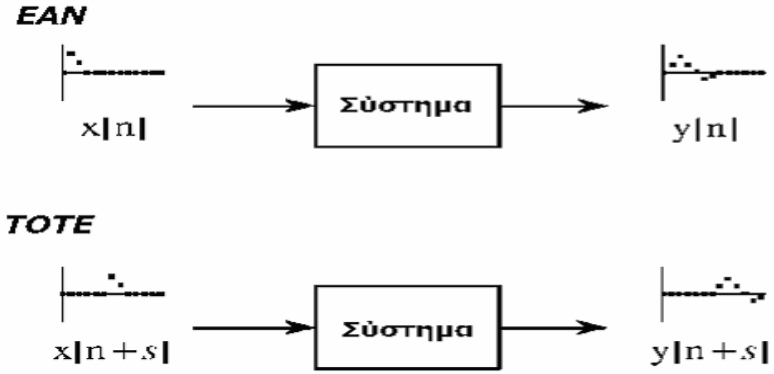
ΚΑΙ ΕΑΝ

$x_2|n|$ → **Σύστημα** → $y_2|n|$

ΤΟΤΕ

$x_1|n| + x_2|n|$ → **Σύστημα** → $y_1|n| + y_2|n|$

Χρονική Αμεταβλητότητα (Shift Invariance)



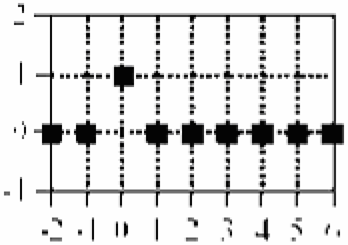
Ένα σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο (shift invariant) αν μία μετατόπιση στην είσοδο προκαλεί πανομοιότυπη μετατόπιση στην έξοδο.

Χρονική Αμεταβλητότητα (Shift Invariance)

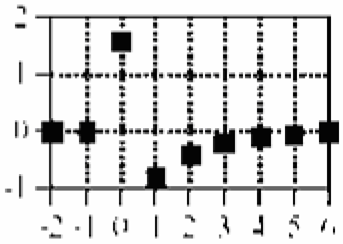
- Τα χαρακτηριστικά του συστήματος δεν αλλάζουν με το χρόνο (ή γενικότερα την οποιαδήποτε ανεξάρτητη μεταβλητή).

Μοναδιαία Συνάρτηση και Μοναδιαία ή Κρουστική Απόκριση

Μοναδιαία (δ) συνάρτηση



Κρουστική απόκριση



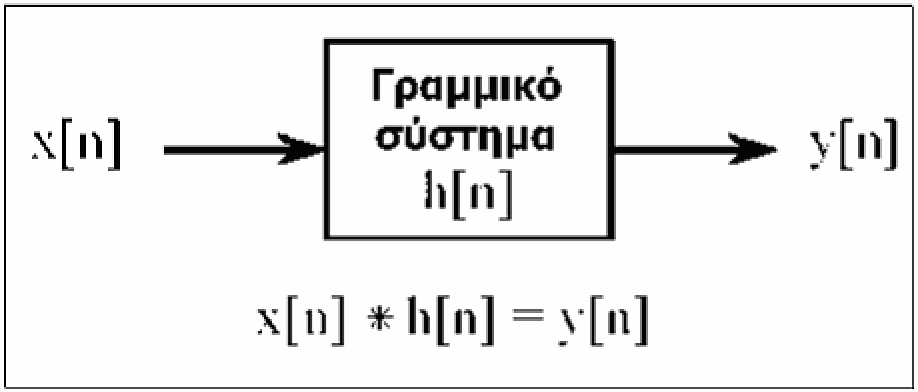
δ[n]

Γραμμικό Σύστημα

h[n]

Κρουστική απόκριση είναι το σήμα εξόδου ενός συστήματος όταν έχει ως είσοδο τη μοναδιαία συνάρτηση.

Συνέλιξη



$$x[n] * h[n] = y[n]$$

Η συνέλιξη περιγράφει τη σχέση μεταξύ 3 σημάτων: σήμα εισόδου, κρουστική απόκριση και σήμα εξόδου.

Η συνέλιξη αντιπροσωπεύει τη σημαντικότερη αριθμητική λειτουργία στο χώρο του DSP.

Ιδιότητες Ψηφιακών Σημάτων

Συνέλιξη :

Αν οι τιμές της ακολουθίας y(n) μπορούν να αναπαρασταθούν από τις τιμές των x(n) και h(n):

$$\boxed{y(n)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}(k)h(n-k)}$$

τότε η αναπαράσταση ονομάζεται συνέλιξη και γράφεται:

$$\boxed{y(n)=\mathrm{x(n)}*\mathrm{h(n)}}$$

Αναπαράσταση ψηφιακών σημάτων στο πεδίο συχνότητας

$$Y(\mathrm{f}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}_{2}(\mathbf{n})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{f_n}} = \mathrm{X}(\mathrm{f})\,\mathrm{H}(\mathrm{f}) \Rightarrow \mathrm{x}(\mathbf{n}) * \mathbf{h}(\mathbf{n})$$

Μετασχηματισμός Fourier
διακριτού σήματος

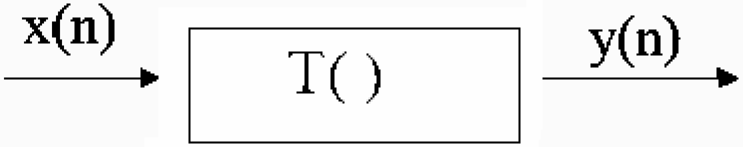
$$\mathrm{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(\mathrm{n})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega \mathrm{n}}$$

Μετασχηματισμός Z
ψηφιακού σήματος

$$\mathrm{Z}[X(n)] = X(\mathrm{Z}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(\mathrm{n}) z^{-n}$$

Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων

- Πολύ σημαντικά/χρήσιμα στην ψηφιακή επεξεργασία σημάτων
  - μείωση/αφαίρεση θορύβου
  - εξαγωγή σήματος από θόρυβο



Ψηφιακό φίλτρο T: σύστημα διακριτού χρόνου που πραγματοποιεί κάποιο μετασχηματισμό σε ψηφιακό σήμα x(n), παράγοντας y(n)

Επεξεργασία βιολογικού σήματος

Περιλαμβάνουν την παραδοσιακή εφαρμογή φίλτρων, τεχνικές μέσου όρου και υπολογισμό φάσματος

- ## Ψηφιακά φίλτρα

Ένα ψηφιακό φίλτρο είναι ένα σύστημα διακριτού χρόνου που πραγματοποιεί κάποιο μετασχηματισμό σε ένα ψηφιακό σήμα $x(n)$, παράγοντας μια έξοδο $y(n)$ όπως φαίνεται και στο σχήμα .

Ένα ψηφιακό φίλτρο είναι ένα σύστημα διακριτού χρόνου που πραγματοποιεί κάποιο μετασχηματισμό σε ένα ψηφιακό σήμα $x(n)$, παράγοντας μια έξοδο $y(n)$ όπως φαίνεται και στο σχήμα .

Τα χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού T[.] προσδιορίζουν το φίλτρο.

Το φίλτρο είναι *χρονικά μεταβλητό* αν ο μετασχηματισμός T[.] είναι συνάρτηση του χρόνου, διαφορετικά είναι *χρονικά αμετάβλητο*.

Αντίστοιχα χαρακτηρίζεται ως γραμμικό, αν, και μόνο αν, όταν έχουμε δύο διαφορετικές εισόδους $x_1(n)$ και $x_2(n)$ και παράγουν αντίστοιχα τις εξόδους $y_1(n)$ και $y_2(n)$, ισχύει:

$$T\left[ax_1 + bx_2\right] = aT\left[x_1\right] + bT\left[x_2\right] = ay_1 + by_2$$

Στη συνέχεια θα θεωρηθούν μόνο **γραμμικά** και **χρονικά αμετάβλητα** συστήματα,
αν και ορισμένες ενδιαφέρουσες εφαρμογές μη γραμμικών και χρονικά εξαρτημένων συστημάτων έχουν προταθεί για την ανάλυση βιολογικών σημάτων.

Η συμπεριφορά ενός φίλτρου συνήθως περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου.

Συνήθως υπολογίζεται από την **εφαρμογή διαφορετικών εισόδων** στο φίλτρο και την παρατήρηση των **αντίστοιχων εξόδων**.

Ειδικότερα, αν η **είσοδος** είναι η ***δ*(*n*)- συνάρτηση Dirac**,
η **έξοδος**, η οποία ονομάζεται **κρουστική απόκριση**,
παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην περιγραφή του φίλτρου.

Αυτή η απόκριση χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της απόκρισης σε πιο πολύπλοκες εισόδους.
Έστω μία είσοδος $x(n)$ που είναι άθροισμα καθυστερημένων παλμών με βάρη, δηλαδή:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty,\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

και ας ορίσουμε την απόκριση του συστήματος στην είσοδο $\delta(n\text{-}k)$ ως $h(n\text{-}k)$.

Αν το φίλτρο είναι χρονικά αμετάβλητο, κάθε καθυστερημένος παλμός θα παράγει την ίδια απόκριση, απλά χρονικά μεταφερομένη, και λόγω της γραμμικότητας, αυτές οι αποκρίσεις θα αθροιστούν ως εξής:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty,\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Αυτή η συνέλιξη συνδέει την **είσοδο** και την **έξοδο** του συστήματος και προσδιορίζει τα **χαρακτηριστικά** του φίλτρου.

Θα αναφερθούμε σε δύο από τα χαρακτηριστικά αυτά, την ***ευστάθεια*** και την ***αιτιατότητα*.**

Το πρώτο εξασφαλίζει ότι πεπερασμένες είσοδοι θα παράγουν πεπερασμένη έξοδο. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να εξαχθεί από την κρουστική απόκριση.

Αποδεικνύεται ότι το **φίλτρο είναι ευσταθές** αν και μόνο αν:

$$\sum_{k=-\infty,\infty} \left| h(k) \right| < \infty$$

- Η *αιτιατότητα* σημαίνει ότι το σύστημα δεν θα παράγει καμία έξοδο πριν εφαρμοσθεί σε αυτό η είσοδος.

- Ένα φίλτρο είναι αιτιατό αν και μόνο αν:

$$h(k) = 0$$

για *κ*<0

Ακόμα και αν η σχέση $$x(n) = \sum_{k=-\infty,\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

περιγράφει πλήρως τα χαρακτηριστικά του φίλτρου,

πολύ συχνά είναι χρήσιμη η **έκφραση της σχέσης εισόδου-εξόδου** σε γραμμικά διακριτού

χρόνου συστήματα με τη **μορφή του μετασχηματισμού *z***,

ο οποίος επιτρέπει την έκφραση της σχέσης σε μία πιο χρήσιμη, λειτουργική και απλούστερη μορφή.

Ο μετασχηματισμός *z*

Ο *μετασχηματισμός z* μιας ακολουθίας *x(n)* ορίζεται ως εξής:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty,\infty} x(k) \cdot z^{-k}$$

Αυτή η σειρά θα συγκλίνει ή θα αποκλίνει για διάφορες τιμές του *z*. Οι τιμές του *z* για τις οποίες η σχέση *συγκλίνει* είναι η *περιοχή σύγκλισης* και εξαρτάται από τη σειρά x(*n*).

συνέλιξη:

Αν $w(n) = \sum_{k=-\infty,\infty} x(k) \cdot y(n-k)$

τότε $W(z) = X(z)Y(Z)$

- **Η συνάρτηση μεταφοράς στο πεδίο *z***

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

όπου η $H(z)$ είναι γνωστή ως *συνάρτηση μεταφοράς* του φίλτρου, και είναι ο μετασχηματισμός z της κρουστικής απόκρισης.

Η $H(z)$ παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση και το σχεδιασμό ψηφιακών φίλτρων.

Η απόκριση σε ημιτονοειδείς εισόδους μπορεί να υπολογισθεί ως εξής: θεωρούμε ένα μιγαδικό ημίτονο $x(n) = e^{j\omega n Ts}$

ως ***είσοδο***, και τότε η αντίστοιχη ***έξοδος*** του φίλτρου θα είναι:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty,\infty} h(k) e^{j\omega n Ts} = \sum_{k=-\infty,\infty} h(k) e^{-j\omega k Ts} = x(n) \cdot H(z)\Big|_{z=e^{-j\omega Ts}}$$

- Επομένως ένα ημίτονο στην είσοδο εξακολουθεί να είναι το ίδιο ημίτονο στην έξοδο, πολλαπλασιασμένο όμως με τη μιγαδική ποσότητα *H*(*ω*). Αυτή η μιγαδική συνάρτηση καθορίζει την απόκριση του φίλτρου για κάθε ημίτονο συχνότητας *ω* στην είσοδο, και είναι γνωστή ως η απόκριση συχνότητας του φίλτρου

Για μια μεγάλη κατηγορία γραμμικών, χρονικά ανεξάρτητων φίλτρων, η *H*(*z*) μπορεί να εκφρασθεί με την παρακάτω μορφή:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0,M} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1,N} a_k z^{-k}}$$

που εκφράζει στο πεδίο *z* την παρακάτω διαφορική εξίσωση στο πεδίο του χρόνου:

$$y(n) = -\sum_{k=1,N} a_k y(n-k) + \sum_{m=0,M} b_m x(n-m)$$

Όταν τουλάχιστον ένας συντελεστής *ακ* είναι διάφορος του μηδενός τότε κάποιες τιμές της εξόδου συμβάλλουν στην τρέχουσα έξοδο.

Το φίλτρο περιέχει κάποια ανάδραση και λέγεται ότι είναι σχεδιασμένο σε αναδρομική μορφή.

Από την άλλη πλευρά, όταν όλοι οι ***συντελεστές ακ είναι μηδενικοί***, τότε η έξοδος του φίλτρου προκύπτει μόνο από την τρέχουσα ή προηγούμενες εισόδους και το **φίλτρο λέγεται ότι είναι σχεδιασμένο *σε μη αναδρομική μορφή.***

- **FIR και IIR φίλτρα**

Ένας συνήθης τρόπος κατηγοριοποίησης των φίλτρων βασίζεται στα χαρακτηριστικά των κρουστικών αποκρίσεών τους.

Στα φίλτρα *πεπερασμένης απόκρισης* (FIR) η *h*(*n*) αποτελείται από ένα περασμένο πλήθος μη μηδενικών τιμών,

ενώ στα φίλτρα *άπειρης απόκρισης* (IIR) η *h*(*n*) ταλαντώνει μέχρι το άπειρο με μη μηδενικές τιμές.

Είναι φανερό ότι στα IIR φίλτρα πρέπει να υπάρχει ανάδραση έτσι ώστε η έξοδος του συστήματος να μην μηδενίζεται όταν πάψει η είσοδος. Η ύπαρξη της ανάδρασης επιβάλει επιπλέον προσοχή όσον αφορά την ευστάθεια του συστήματος.

Ακόμα και όταν τα FIR φίλτρα συνήθως υλοποιούνται σε μη αναδρομική μορφή, και τα IIR φίλτρα σε αναδρομική μορφή, αυτοί οι δύο τρόποι κατηγοριοποίησης δεν συμπίπτουν. Όπως φαίνεται και παρακάτω, ένα FIR φίλτρο μπορεί να εκφρασθεί σε αναδρομική μορφή για μια πιο βολική, υπολογιστικά, υλοποίηση:

$$H(z) = \sum_{k=0,N-1} z^{-k} = \sum_{k=0,N-1} z^{-k} \frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Ο μετασχηματισμός *z*

Πολύ συχνά είναι χρήσιμη η έκφραση της σχέσης εισόδου-εξόδου σε γραμμικά διακριτού χρόνου συστήματα με τη μορφή του μετασχηματισμού z, ο οποίος επιτρέπει την έκφραση της σχέσης σε μία πιο χρήσιμη , λειτουργική και απλούστερη μορφή.

FIR και IIR φίλτρα

Ένας συνήθης τρόπος κατηγοριοποίησης των φίλτρων βασίζεται στα χαρακτηριστικά των κρουστικών αποκρίσεών τους. Στα φίλτρα πεπερασμένης απόκρισης (FIR) η $h(n)$ αποτελείται από ένα περασμένο πλήθος μη μηδενικών τιμών, ενώ στα φίλτρα άπειρης απόκρισης (IIR) η $h(n)$ ταλαντώνει μέχρι το άπειρο με μη μηδενικές τιμές.

Μέση τιμή σήματος

Το παραδοσιακό φιλτράρισμα λειτουργεί πολύ καλά όταν το περιεχόμενο συχνοτήτων του σήματος και του θορύβου δεν επικαλύπτονται. Όταν όμως το εύρος ζώνης σήματος και θορύβου επικαλύπτονται, και το πλάτος θορύβου είναι αρκετά για να αλλοιώσει το σήμα, μόνο η τεχνική της μέσης τιμής μπορεί να λύσει ικανοποιητικά το πρόβλημα του διαχωρισμού σήματος θορύβου.

Φασματική ανάλυση

Οι διάφορες μέθοδοι για τον υπολογισμό της φασματικής πυκνότητας ισχύος (PSD) ενός σήματος διακρίνονται σε μη-παραμετρικές και παραμετρικές.

➢ Μη-παραμετρικές μέθοδοι

Πρόκειται για παραδοσιακή μέθοδο ανάλυσης βασισμένη στο μετασχηματισμό Fourier που υπολογίζεται μέσω του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (FFT).

➢ Παραμετρικές μέθοδοι

Η παραμετρική προσέγγιση θεωρεί ότι η υπό ανάλυση χρονική ακολουθία είναι έξοδος ενός δοθέντος μαθηματικού μοντέλου, και δεν γίνονται δραστικές υποθέσεις σχετικά με τα δεδομένα εκτός παραθύρου.

Οι παραμετρικές μέθοδοι, είναι πιο σύνθετες υπολογιστικά από τις μη-παραμετρικές, αφού απαιτούν μια εκ των προτέρων επιλογή της δομής και της τάξης του μοντέλου του μηχανισμού γένεσης του σήματος.

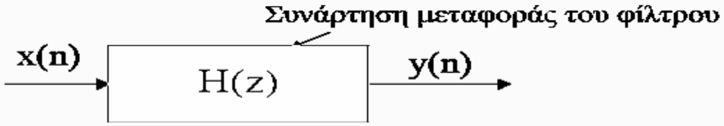
Χαρακτηρισμός ψηφιακών φίλτρων

- *Χρονικά αμετάβλητο:* ο μετασχηματισμός δεν είναι συνάρτηση του χρόνου
- *Γραμμικό:*
  - είσοδος $x_1(n)$ ➔ έξοδο $y_1(n)$
  - είσοδος $x_2(n)$ ➔ έξοδο $y_2(n)$

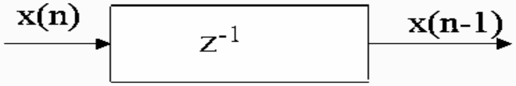
  και ισχύει:

$$\mathrm{T}[ax_1+bx_2] = a\mathrm{T}[x_1]+b\ \mathrm{T}[x_2] = ay_1+by_2$$

Υλοποίηση Ψηφιακών φίλτρων



$$\sum_{p=0}^{N} a_p y(n-p) = \sum_{q=0}^{M} b_q x(n-q) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{q=0}^{M} b_q z^{-q}}{\sum_{p=0}^{N} a_p z^{-p}}$$



Το z^{-1} αντιστοιχεί σε μία χρονική καθυστέρηση

Φίλτρα IIR και FIR

Προηγούμενοι έξοδοι -
Αναδρομική μορφή

$$y(n) = -\sum_{p=1}^{N} \frac{a_p}{a_0} y(n-p) + \sum_{q=0}^{M} \frac{b_q}{a_0} x(n-p)$$

IIR

$$y(n) = \sum_{q=0}^{M} \frac{b_q}{a_0} x(n-p)$$

FIR

Προηγούμενες και τρέχουσες είσοδοι
Μη αναδρομική μορφή

Υλοποίηση IIR φίλτρων

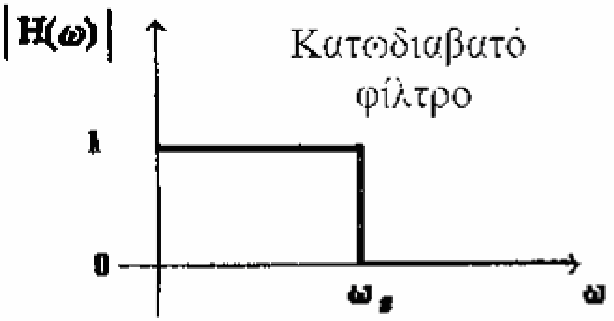
Στο πεδίο Z

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

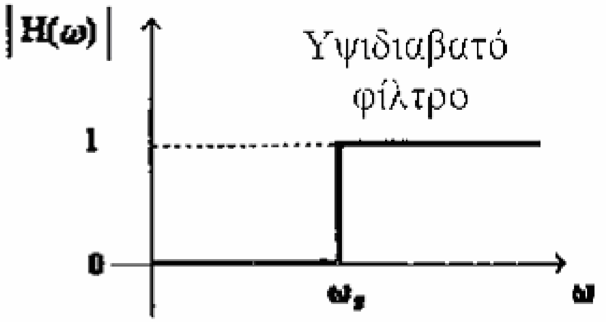
$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \ldots a_N y(n-N) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots + b_M x(n-M)$$

Στο πεδίο χρόνου

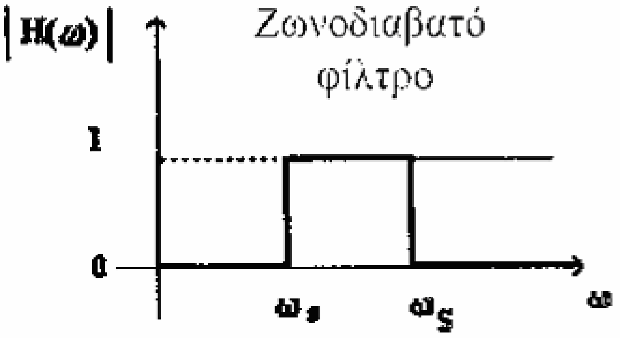
Ιδανικά Φίλτρα



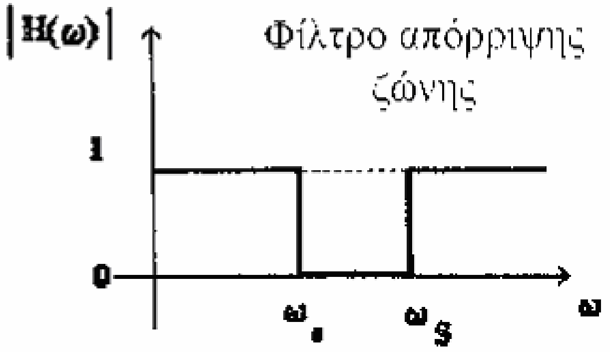
Κατωδιαβατό φίλτρο



Υψιδιαβατό φίλτρο

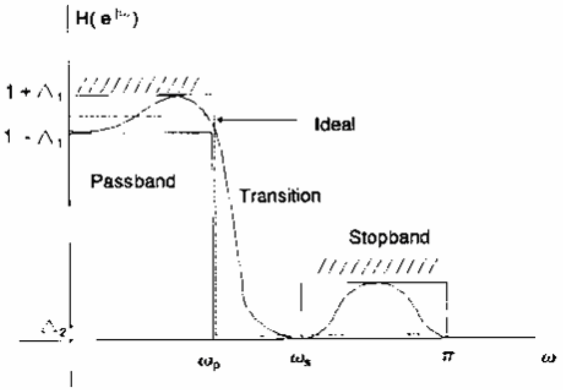


Ζωνοδιαβατό φίλτρο



Φίλτρο απόρριψης ζώνης

Φίλτρα



Ιδανικά και πραγματικά ψηφιακά κατωδιαβατά φίλτρα

Φίλτρα Butterworth

- Ορίζονται από 2 παραμέτρους:
  - Τάξη του φίλτρου N
  - Συχνότητα αποκοπής Ω_c

$$\left|H(\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

Συχνότητες ζωνών διέλευσης και αποκοπής

$$\Omega_p = \tan(\frac{\omega_p}{2}) = \tan(\frac{\pi f_p}{f_{sr}})$$

$$\Omega_s = \tan(\frac{\omega_s}{2}) = \tan(\frac{\pi f_s}{f_{sr}})$$

Συχνότητα δειγματοληψίας

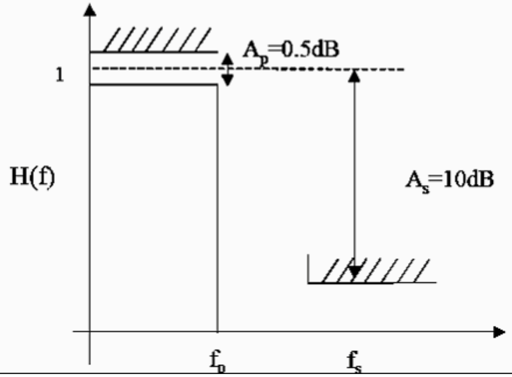
$$N = \frac{\ln[(10^{A_s/10}-1)/(10^{A_p/10}-1)]}{2\ln(\Omega_s/\Omega_p)}$$

Εξασθένηση (Attenuation)

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{(10^{\mathrm{A}p/10}-1)^{1/2\mathrm{N}}}$$

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί κατωδιαβατό φίλτρο με συχνότητα δειγματοληψίας 10kHz με 1kHz ζώνη διέλευσης και αποκοπή στα 1,5kHz. Μέγιστη εξασθένηση ζώνης διέλευσης (passband) 0,5dB και ελάχιστη εξασθένηση ζώνης αποκοπής (stopband) 10dB.



Παράδειγμα

Αναλογικές συχνότητες

$$\Omega_p = \tan(\frac{\omega_p}{2}) = 0,32 \,\&\, \Omega_s = \tan(\frac{\omega_s}{2}) = 0,51$$

Τάξη φίλτρου

$$N = \frac{\ln[(10^{10/10} - 1)/(10^{0,5/10} - 1)]}{2\ln(0,51/0,32)} \cong 4,75$$

Συχνότητα αποκοπής

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{(10^{A_p/10} - 1)^{1/2N}} = 0,405$$

Ψηφιακή συχνότητα αποκοπής

$$f_c = f_{sr}\frac{1}{\pi}\tan^{-1}(\Omega_c) = 1,215\ x 10^3\ \mathrm{Hz}$$

Εφαρμογή Φίλτρων σε Επεξεργασία ΗΚΓ

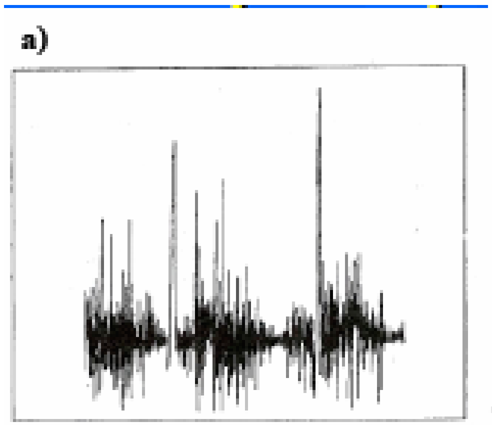
- Πηγές θορύβου:
  - Σύσπαση μυών (ΗΜΓ θόρυβος)
  - Παράσιτα λόγω κίνησης
  - Αναπνοή
  - Διεπαφή (Interface) δέρματος - ηλεκτροδίου

Φίλτρα Butterworth

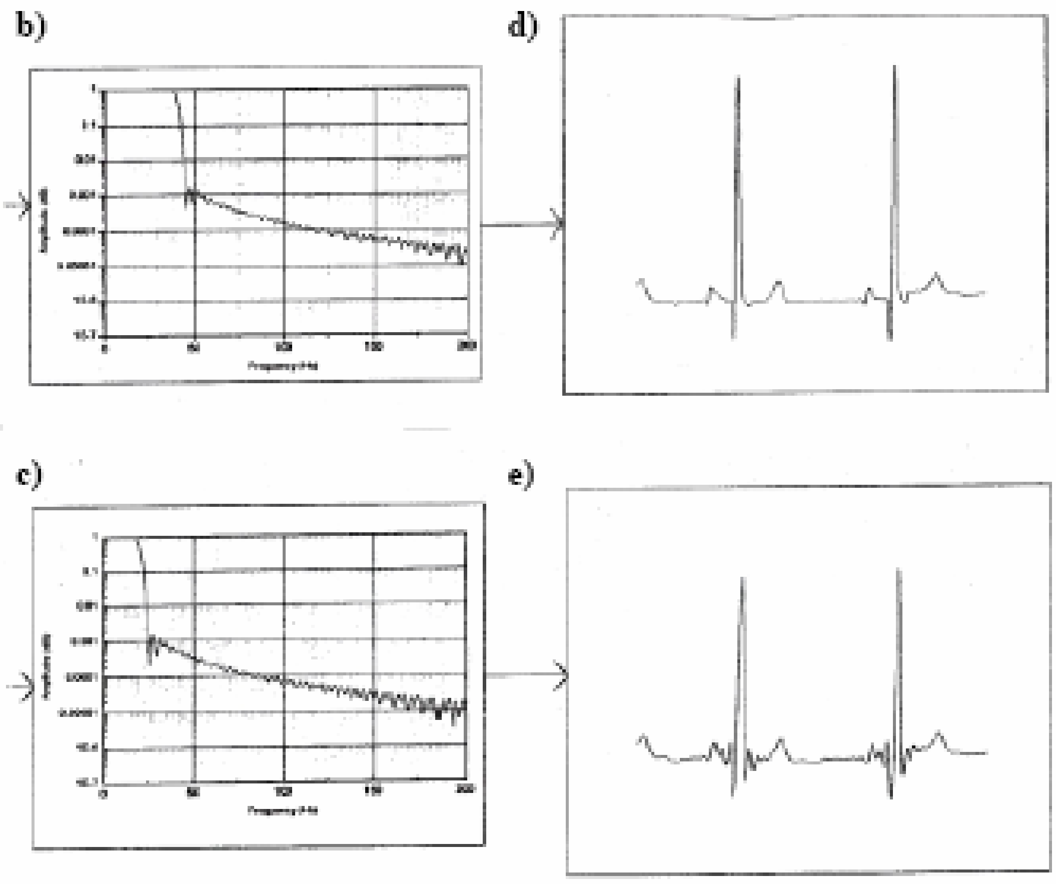
- Ορίζονται από 2 παραμέτρους:
  - Τάξη του φίλτρου N
  - Συχνότητα αποκοπής Ω_c

$$\boxed{\left|H(\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}}$$

Επίδραση δύο κατωδιαβατών φίλτρων



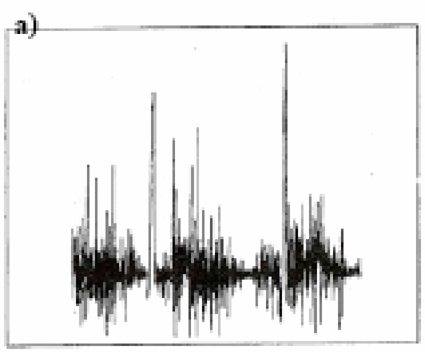
a) ΗΚΓ με ΗΜΓ θόρυβο

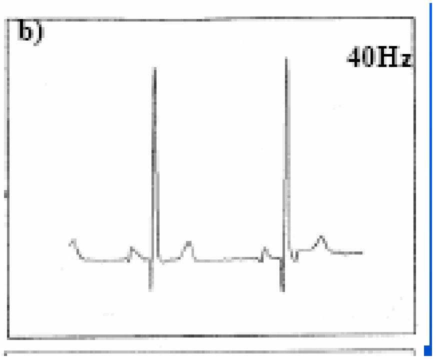


b,c) Απόκριση συχνοτήτων δύο FIR φίλτρων. Συχνότητα αποκοπής: 40 Hz, 20 Hz
d,e) Φιλτραρισμένες κυματομορφές ΗΚΓ

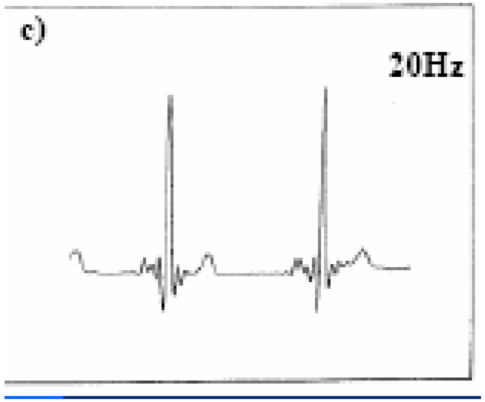
Επίδραση δύο κατωδιαβατών φίλτρων

a) Σήμα εισόδου
b, c) Σήματα εξόδου



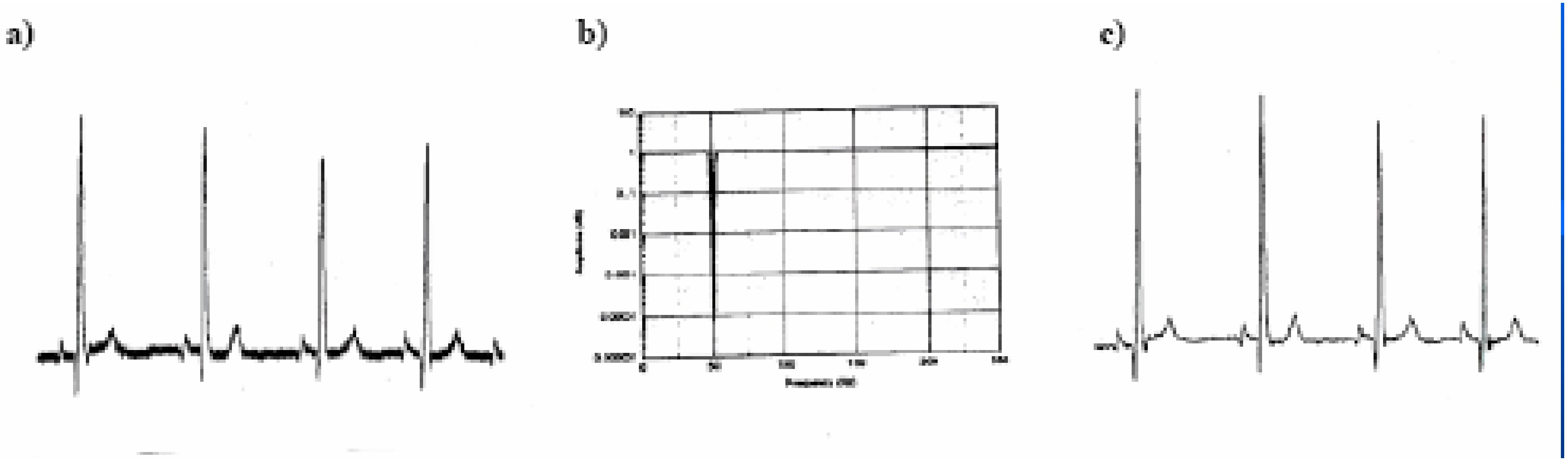


- Δραστική μείωση του θορύβου
- Μεταβολή της αρχικής ΗΚΓ κυματομορφής :
    - Cutoff frequency ↓
    - Το πλάτος του R wave ↓
    - Το εύρος του QRS ↑
    - P waves σχεδόν ανέπαφα (συχνότητα < 20-30 Hz)



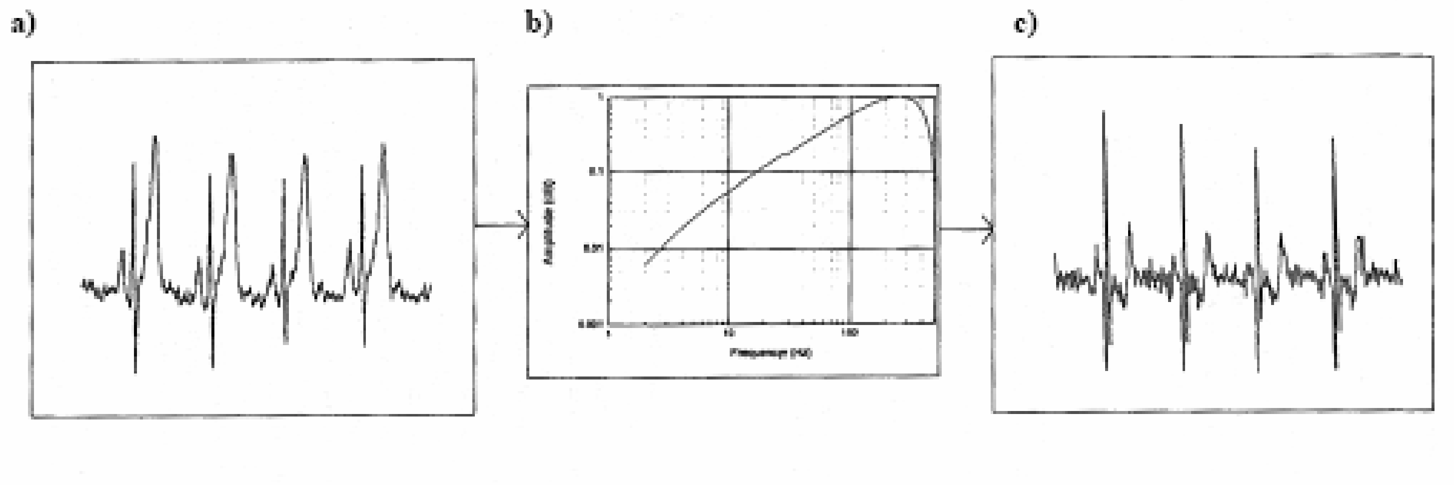
Αύξηση διάρκειας QRS ⇒ κοιλιακή υπερτροφία

Επίδραση φίλτρου σχισμής/απόρριψης ζώνης



a) ΗΚΓ σήμα με θόρυβο 50 Hz
b) Φίλτρο σχισμής με συχνότητα αποκοπής 50 Hz
c) Φιλτραρισμένο ΗΚΓ - μείωση παρεμβολών από την τροφοδοσία

Εφαρμογή υψιδιαβατού φίλτρου για ανίχνευση QRS συμπλέγματος



a) ΗΚΓ σήμα
b) Υψιδιαβατό φίλτρο
c) Φιλτραρισμένο ΗΚΓ - εύκολη η αναγνώριση του QRS συμπλέγματος

Μέση Τιμή Σήματος

Επικάλυψη εύρους ζώνης σήματος και θορύβου.

Σχετικά μεγάλο πλάτος θορύβου ⇒ αλλοίωση σήματος

Μέση Τιμή Σήματος

Προκλητά δυναμικά: εγκεφαλικά δυναμικά που προκαλούνται από κάποιο ερέθισμα.

Ίδιο εύρος συχνοτήτων με ΗΕΓ.

Πλάτος προκλητών δυναμικών << πλάτος ΗΕΓ

Χαρακτηριστικό προκλητών δυναμικών: το επιθυμητό σήμα επαναλαμβάνεται ίδιο σε κάθε επανάληψη

Μέση Τιμή Σήματος

Άθροισμα επαναλήψεων σήματος μαζί με υπερτιθέμενο θόρυβο

$$\boxed{y(n)_i = x(n) + w_i(n)}$$

Καταγραφόμενο σήμα *y(n)* στην i-στή επανάληψη

x(n): σήμα που θέλουμε να μετρήσουμε

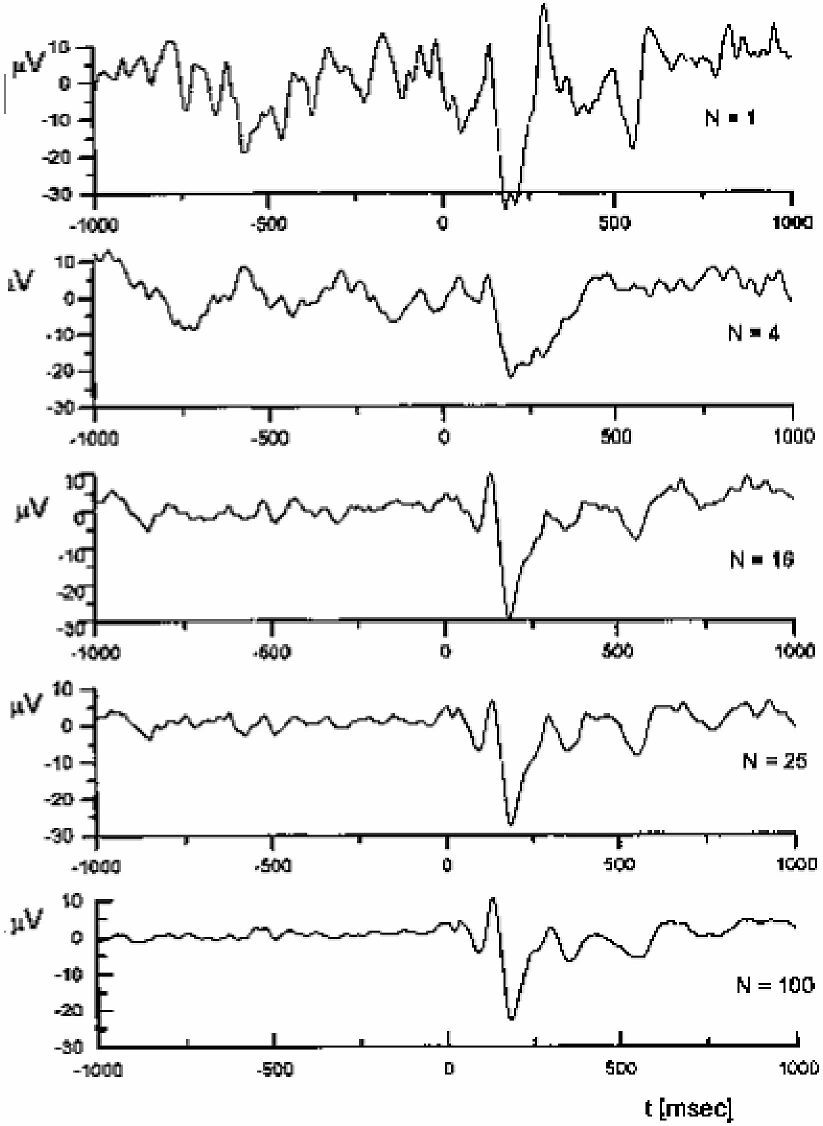
w(n): υπερτιθέμενος θόρυβος με μηδενική μέση τιμή

$$y_i(n) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = x(n) + \sum_{i=1}^{N} w_i(n) = x(n)$$

Ανάδειξη προκλητού δυναμικού με χρήση τεχνικής μέσου όρου

- Η επίδραση του ΗΕΓ μειώνεται σταδιακά και η μορφολογία του προκλητού δυναμικού γίνεται πιο αναγνωρίσιμη καθώς αυξάνει ο αριθμός των επαναλήψεων *N*

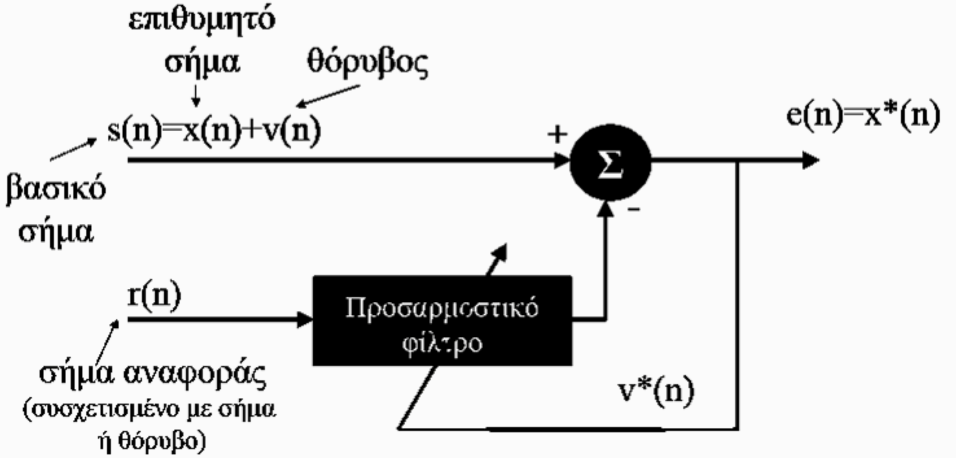
- ***Υπολογισμός ποσοτικών δεικτών κλινικού ενδιαφέροντος: πλάτος, καθυστέρηση κυματομορφών***



Προσαρμοστικά (adaptive) φίλτρα

- Στόχος η αφαίρεση του θορύβου στο παρασκήνιο από το **βασικό σήμα**
- Βασικό σήμα: επιθυμητό σήμα + θόρυβος
- Στηριζόμαστε σε σήμα αναφοράς με συσχέτιση ως προς σήμα ή το θόρυβο

Προσαρμοστικά (adaptive) φίλτρα



LMS-based adaptive filters

$$v^*(n) = \sum_{m=0}^{M} \omega_m(n)\, r(n-m) =$$

$$= \omega_0(n)\, r(n) + \omega_1(n)\, r(n-1) + \ldots + \omega_M(n)\, r(n-M)$$

$$0 \le m \le M$$

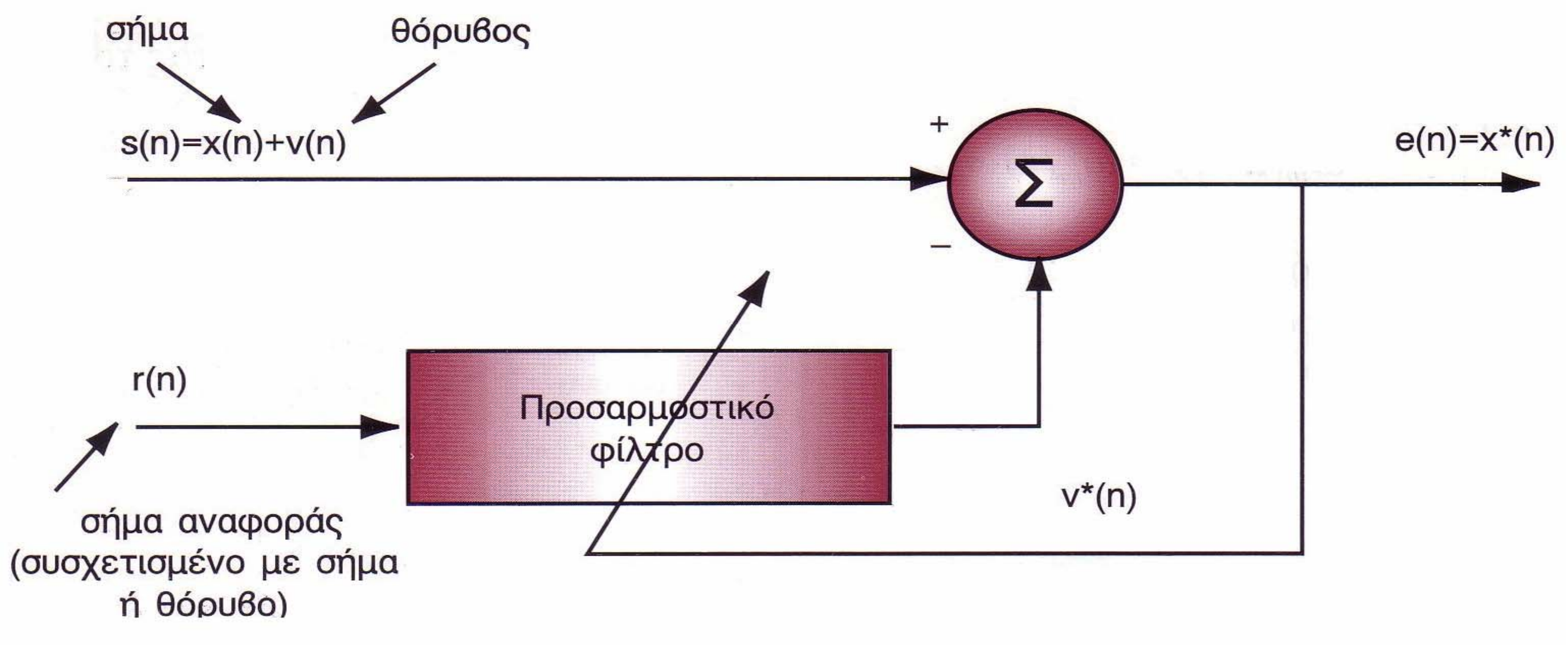
οπου $\underline{\omega} = R^{-1}\underline{P}$, $R = E[\underline{r}(n)\underline{r}(n)^T]$, $\underline{P} = E[S(n)\underline{r}(n)^T]$

- Βήμα 1: Υπολογισμός v*(n)
- Βήμα 2: Εκτίμηση e(n)=S(n)-v*(n)
- Βήμα 3: Ενημέρωση συντελεστών φίλτρου:

$$\boxed{\omega_m(n+1) = \omega_m(n) + 2\mu e(n) r^*(n-m)}$$

Προσαρμοστικά φίλτρα

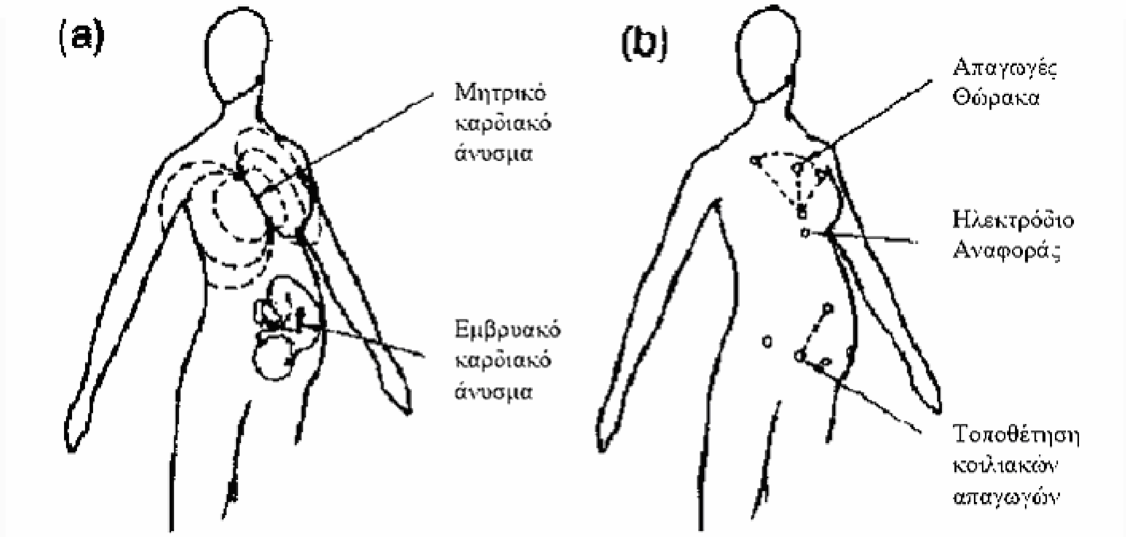
Τα προσαρμοστικά φίλτρα χρησιμοποιούνται για την αφαίρεση θορύβου από το βασικό σήμα.



Εφαρμογές στο ΗΚΓ

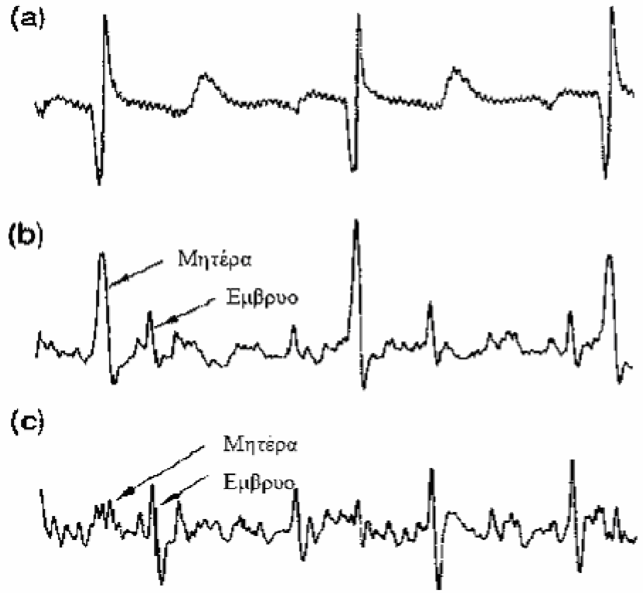
- Μέτρηση εμβρυακού ΗΚΓ - αφαίρεση μητρικού ΗΚΓ
  - Βασικό σήμα: ΗΚΓ εμβρύου (περιοχή κοιλιάς)
  - Σήμα αναφοράς: μητρικό ΗΚΓ

Εμβρυακό ΗΚΓ



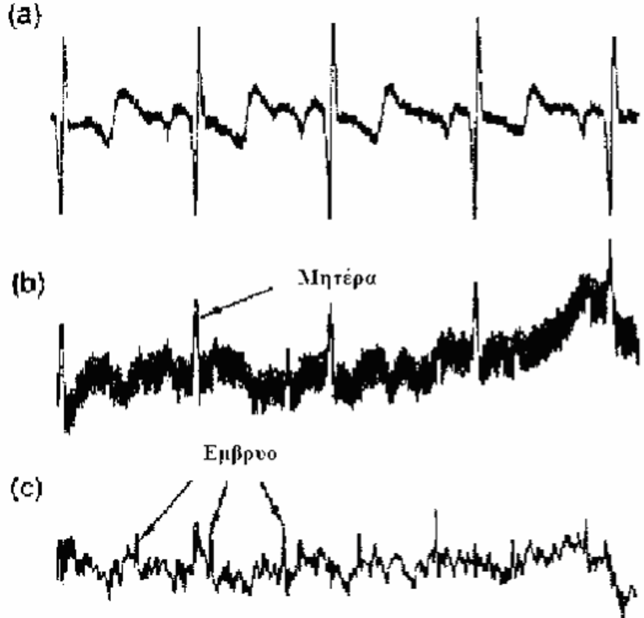
Ακύρωση μητρικού καρδιακού παλμού στην εμβρυϊκή ηλεκτροκαρδιογραφία
a) Καρδιακά ηλεκτρικά ανύσματα μητέρας και εμβρύου
b) Τοποθέτηση απαγωγών

Εμβρυακό ΗΚΓ



Αποτέλεσμα πειράματος εμβρυακού ΗΚΓ (εύρος 3-35Hz, ρυθμός δειγματοληψίας 256 Hz).

a) Σήμα αναφοράς (chest lead)
b) Αρχική είσοδος (abdominal lead)
c) Έξοδος ακύρωσης θορύβου



Αποτέλεσμα πειράματος εμβρυακού ΗΚΓ ευρείας ζώνης (εύρος 0.3-75Hz, ρυθμός δειγματοληψίας 512 Hz).

a) Σήμα αναφοράς (chest lead)
b) Αρχική είσοδος (abdominal lead)
c) Έξοδος ακύρωσης θορύβου